Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 153.

In vier Heften.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1924.

Grad. R. R. 3

OCT 26 1923

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 153.

Heft 1/2.

Ausgegeben den 27. August.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1923

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 153. Heft 1/2.

Inhaltsverzeichnis.

Sturm, Rudolf, Ein- und Zweischaligkeit von Flächen 3. Ordnung . . . . . Seite 1
Hensel, Kurt, Arithmetische Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten . . . — 8
Hasse, Helmut, Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen . . — 12
Wiarda, G., Beiträge zur Theorie der *Laguerre*schen Polynome und zum Summationsproblem von Orthogonalsystemen . . . . . — 44
Boecklen, Karl, Bemerkung zu Herrn *A. Fraenkel's* Aufsatz „Die Berechnung des Osterfestes“ . . . . . — 61
Wolff, Hermann, Über die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der ebenen Dreiecke mit reellen Seiten . . . . . — 66
Hasse, Helmut, Zur Theorie des quadratischen *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern . . . . . — 76
Rychlík, Karl, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper . . . . . — 94
Rella, Tonio, Bemerkungen zu Herrn Hensels Arbeit „Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper“ . — 108
Rella, Tonio, Zur *Newton*schen Approximationsmethode in der Theorie der p-adischen Gleichungswurzeln . . . . . — 111
Hasse, Helmut, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper . . . . . — 113
Remak, Robert, Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren . . . . . — 131

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 153.

Sturm, Rudolf, Ein- und Zweischaligkeit von Flächen 3. Ordnung . . . . Seite 1
Hensel, Kurt, Arithmetische Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten . . — 8
Hasse, Helmut, Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen . . — 12
Wiarda, G., Beiträge zur Theorie der *Laguerre*schen Polynome und zum Summationsproblem von Orthogonalsystemen . . . . . — 44
Boecklen, Karl, Bemerkung zu Herrn *A. Fraenkel's* Aufsatz „Die Berechnung des Osterfestes“ . . . . . — 61
Wolff, Hermann, Über die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der ebenen Dreiecke mit reellen Seiten . . . . . — 66
Hasse, Helmut, Zur Theorie des quadratischen *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern . . . . . — 76
Rychlík, Karl, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper. . . . . — 94
Rella, Tonio, Bemerkungen zu Herrn Hensels Arbeit „Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper“ . — 108
Rella, Tonio, Zur *Newton*schen Approximationsmethode in der Theorie der p-adischen Gleichungswurzeln . . . . . — 111
Hasse, Helmut, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper . . . . . — 113
Remak, Robert, Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren . . . . . — 131
Tietze, Heinrich, Über die *Gauß-Green-Stokes*schen Integralsätze . . . . — 141
Hasse, Helmut, Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper . . . . . — 158
Arwin, A., Eine ganzzahlige Transformation einer ternären quadratischen Form — 163
v. Ludwig, Bernhard, Zur Theorie des *Malfatti*schen Problems . . . . . — 175
Hasse, Helmut, Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern . . . . . — 184
Hasse, Helmut, Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nicht-primäre Zahlen — 192
Stengel, C., Über quadratische Nichtreste von der Form $8h+1$ . . . . — 208
Schmeidler, Werner, Zur affinrationalen Geometrie . . . . . — 215
Hoheisel, G., Untersuchungen über die asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen . . . . . — 228
Hoheisel, G., Der Wertevorrat von Lösungen linearer Differentialgleichungen — 245
Roeser, E., Von der Umkehrbarkeit des Parallelismus in der nichteuklidischen Ebene . . . . . — 249
Brouwer, L. E. J., Berichtigung . . . . . — 253

Ausgabedaten der Hefte von Band 153.

Heft 1/2 ausgegeben am 27. August 1923
Heft 3/4 ausgegeben am 6. März 1924.

Druckfehlerberichtigung[1])

zu der Arbeit

Klassenanzahlen bei linearen Substitutionen.

Von Herrn *H. Brandt* in Aachen.

(Dieses Journal, Bd. 152, S. 235).

Auf Seite 235 Zeile 9 und 12 sind die Zeichen $\succ$ und $\prec$ zu vertauschen,
Zeile 18 lies Klassenanzahlen statt Klassenzahlen,
in der ersten Fußnote ist das Wort „und“ zu streichen,
in der vierten Note lies 160 statt 169,
in der fünften Note ist das Wort „Druckfehler“ zu streichen.

Auf Seite 237 Zeile 25 muß es im Exponenten σ_i statt σi und σ_{i+1} statt σ_{i-1} heißen.

Auf Seite 238 Zeile 8 lies Doppelklassen statt Doppeltklassen.

Außerdem sollte der Index i in allen Fällen einen Punkt haben.

---

[1]) Infolge Verlustes einer Korrektursendung und Versehens seitens der Redaktion haben leider die Korrekturen des Autors keine Berücksichtigung gefunden, so daß eine Anzahl Druckfehler stehengeblieben ist.

Ausgabedaten der Hefte von Band 153.

Heft 1/2 ausgegeben am 27. August 1923
Heft 3/4 ausgegeben am 6. März 1924.

Ein- und Zweischaligkeit von Flächen 3. Ordnung.

Von Herrn *Rudolf Sturm* † in Breslau.

---

1. In bezug auf *die Realität der 27 Geraden einer kubischen Fläche* bestehen 5 *Gattungen*, welche zuerst von *Schläfli* angegeben worden sind [1]). Nach der Numerierung von *Cremona*, der ich mich nun auch angeschlossen habe [2]), sind sie, unter Zugrundelegung einer Doppelsechs:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6, \end{matrix}$$

in der a_i und b_k mit verschiedenen Zeigern sich schneiden, und wenn die Schnittlinien $c_{ik} = (a_i\, b_k, a_k\, b_i)$ die 15 übrigen Geraden sind, von denen wiederum solche ohne gemeinsamen Zeiger, wie c_{12}, c_{34} sich schneiden, die folgenden:

I. Alle Geraden sind reell.

II. Alle c sind reell, die übrigen rein imaginär, und zwar je zwei windschiefe a_i, b_i konjugiert.

III. 7 Geraden sind reell: c_{12}, c_{34}, c_{56}; a_1, b_2; a_2, b_1, von denen c_{12} die übrigen schneidet; c_{35}, c_{46}; c_{36}, c_{45} sind „punktiert“ (imaginär mit einem reellen Punkte) und bilden zwei reell-imaginäre Geradenpaare mit reellem Doppelpunkt und in reeller Ebene; die übrigen 16 Geraden sind rein imaginär und die windschiefen a_3, a_4; a_5, a_6; b_3, b_4; b_5, b_6; c_{13}, c_{14}; c_{15}, c_{16}; c_{23}, c_{24}; c_{25}, c_{26} konjugiert.

IV. 3 Geraden sind reell: c_{12}, c_{34}, c_{56} und in einer Ebene gelegen; c_{13}, c_{24}; c_{14}, c_{23}; c_{15}, c_{26}; c_{16}, c_{25}; c_{35}, c_{46}; c_{36}, c_{45} bilden reell-imaginäre Geradenpaare; die übrigen sind (rein) imaginär und die windschiefen a_1, a_2; a_3, a_4; a_5, a_6; b_1, b_2; b_3, b_4; b_5, b_6 konjugiert; also außer den reellen 12 punktierte und 12 imaginäre Geraden.

V. Die c sind wie in IV; auch a_1, b_2; a_2, b_1; a_3, b_4; a_4, b_3; a_5, b_6; a_6, b_5 bilden reell-imaginäre Geradenpaare; demnach 24 punktierte Geraden außer den reellen [3]).

2. *Die Erzeugung der kubischen Fläche durch einen Flächenbüschel 2. Ordnung und einen Ebenenbüschel, welche projektiv sind*, hat den Vorzug vor andern Erzeugungen, daß sie (reell) zu allen 5 Gattungen führt; bei ihr entsteht die Fläche

---

[1]) Philos. Transactions Bd. 153 (1863) S. 193; Quarterly Journal of Mathematics Bd. 2.

[2]) Dieses Journal Bd. 68, S. 117; Geom. Verwandschaften Bd. IV Nr. 911.

[3]) In meinen „Flächen dritter Ordnung“ (1867) ist die Bezeichnung leider schwankend. Auf S. 301 sind die Gattungen mit 1, 4, 2 (oder 6), 5, 3, auf S. 318 mit (𝔄), (𝔅), (ℭ), (𝔈), (𝔇) bezeichnet, in Kap. 8 mit I, IV, II (VI), V, III; in der Liniengeometrie Bd. II, Nr. 395 mit I, II, III, V, IV.

in anschaulicher Weise durch die Kegelschnitte in den Ebenen durch eine Gerade auf ihr. Daraus läßt sich leicht *die Ein- und Zweischaligkeit* ableiten, auf welche *Cremona* und ich in unsern Arbeiten von 1866 noch nicht eingegangen sind. Erst 1873 wies wiederum *Schläfli* auf diese Untersuchungsrichtung hin [1]).

Nur die Gattung V ist zweischalig.

Die Achse des Ebenenbüschels sei c_{12}; unter den Kegelschnitten in seinen Ebenen befinden sich die 5 Geradenpaare:

$$c_{34}, c_{56};\ c_{35}, c_{46};\ c_{36}, c_{45};\ a_1, b_2;\ a_2, b_1,$$

von denen das erste reell, die andern reell-imaginär sind. Ein reelles Geradenpaar führt von reellen Hyperbeln zu ebensolchen, ein reell-imaginäres von reellen Ellipsen zu reell-imaginären Kegelschnitten (mit reellem Polarfeld). Von den Teilen, in welche der Ebenenbüschel durch die (reellen) Ebenen dieser 4 reell-imaginären Geradenpaare geteilt wird, sei derjenige, welcher die Ebene des reellen Geradenpaars enthält, der erste. Seine Ebenen und die des dritten enthalten reelle, die des zweiten und vierten reell-imaginäre Kegelschnitte; *und so entstehen die beiden Schalen.*

Auf der Achse bilden bekanntlich die Schnittpunkte-Paare der Kegelschnitte (oder der Flächen des Büschels 2. Ordnung) eine Involution, so daß jeder Punkt nur von einem Kegelschnitte herrührt. Innerhalb des ersten Teils haben wir reell und imaginär schneidende Kegelschnitte: das reelle Geradenpaar und seine beiderseitigen Nachbarn, die abschließenden reell-imaginären Geradenpaare und ihre einseitigen Nachbarn. Daher erhalten wir schon bei diesen Kegelschnitten den Übergang von den einen zu den andern durch die in den (reellen) Doppelpunkten der Involution berührenden Kegelschnitte. Also ist auf der andern Schale eine Wiederholung dieses Übergangs nicht mehr möglich; sie enthält nur Kegelschnitte, welche die Achse imaginär schneiden. Die Achse gehört ganz der ersten Schale an, die zweite tritt nicht an sie heran, kann aber, wenn sie reell durch die unendlich ferne Ebene geht, aus zwei in den Scheitelräumen des dritten Teils des Ebenenbüschels gelegenen Mänteln bestehen; die erste tut das immer.

Wie bei den Kurven schon sorgfältig *Ast* oder *Zweig* und *Zug* unterschieden wird, so muß bei den Flächen *Mantel* und *Schale* unterschieden werden; daher ist nur: zwei*manteliges* Hyperboloid zu sagen; die beiden Mäntel bilden zusammen *eine* Schale.

Eine die Achse treffende Gerade, die im dritten Teile des Büschels liegt, schneidet die Fläche dort, wo sie den Kegelschnitt in der sie enthaltenden Büschelebene schneidet, daher die zweite Schale paarmal, während eine im ersten Teil gelegene Gerade die Achse, also die erste Schale unpaarmal trifft. Welcher Zug einer zweizügigen Kurve 3. Ordnung unpaar, paar ist, zeigt das Verhalten schon einer Gerade. Also schneidet eine Ebene, welche die zweite Schale trifft, sie in dem paaren, die andere Schale in dem unpaaren, den Achsenschnitt enthaltenden Zuge einer zweizügigen Kurve 3. Ordnung; und jede Gerade trifft deshalb jene paar-,

---

[1]) Annali di Matematica Ser. II, Bd. 5, S. 289.

diese unpaarmal, so daß die Schalen selbst *paar*, *unpaar* genannt werden können. Die unpaare Schale allein kann zwei- oder einzügig geschnitten werden, wie der Übergang durch den Schnitt einer Berührungsebene mit eigentlichem oder isoliertem Doppelpunkt im Berührungspunkt zeigt. Die paare Schale, welche keine reellen dreipunktig berührenden Tangenten besitzt, also nur Berührungsebenen mit isoliertem Doppelpunkt, — die mit eigentlichem Doppelpunkt sind ja nicht zweizügig — ist durchweg positiv gekrümmt.

3. Bei den Gattungen I, II fehlt die Übergangsform von reellen zu reell-imaginären Kegelschnitten; alle sind reell und wir erhalten nur eine Schale.

Nehmen wir bei III die Gerade c_{34} als Achse, so fehlen ebenfalls die reell-imaginären Geradenpaare; wird c_{12} genommen, so zerfällt durch die Ebene der beiden reell-imaginären Geradenpaare der Büschel nur in 2 Teile: mit reellen Kegelschnitten, mit reell-imaginären in den Ebenen; also ergibt sich nur eine Schale.

Und ebenso ist IV einschalig.

4. Bei einer eindeutig auf eine Ebene abbildbaren Fläche fordert der Zusammenhang der Punkte in der Ebene einen ebensolchen auf der Fläche. *Also kann die zweischalige Fläche* V *nicht eindeutig auf eine Ebene abbildbar sein* [1]).

Weil nun die Erzeugungen durch *drei kollineare Bündel* [2]) oder *drei trilineare Büschel* sofort zu einer eindeutigen Abbildung führen, so kann V *durch diese Erzeugungen* (*reell*) *hergestellt werden.*

5. *Die Zweischaligkeit von* V *läßt aber auch keine reellen kubischen Raumkurven auf der Fläche zu.* Denn eine solche Kurve müßte, als einzügige, ganz auf der einen Schale liegen; dann würde die von einem Punkte der paaren Schale an sie kommende Doppelsekante diese Schale unpaarmal treffen: einmal als ideelle Doppelsekante, gleichgültig auf welcher Schale die Kurve liegt, einmal oder dreimal als eigentliche Doppelsekante, je nachdem die Kurve auf der unpaaren oder paaren Schale liegt.

Dasselbe gilt für jede Kurve vom Geschlechte 0 — daher einzügig — *mit einer ungeraden Anzahl von Doppelsekanten aus einem Punkte*, z. B. für die Raumkurve 4. Ordnung 2. Art, bei der diese Zahl 3 ist. Für deren Vorhandensein fehlen bei V auch die beiden reellen oder konjugiert imaginären windschiefen Geraden, welche den Schnitt mit der einzigen durchgehenden Fläche 2. Ordnung vervollständigen.

Mit den kubischen Raumkurven fehlen auch die Raumkurven 6. Ordnung mit 8 Doppelsekanten aus einem Punkte (vom Geschlecht 3, Rang 16), welche jene zu vollen Schnitten mit andern Flächen 3. Ordnung ergänzen. Und so können noch zahlreiche *negative* Eigenschaften für V abgeleitet werden.

6. Ein interessantes Beispiel für drei Gattungen, darunter V, bilden die Flächen mit der Gleichungsform

$$2xyz + A(x^2 + y^2 + z^2) = B,$$

die von *Goursat* — für rechtwinklige Koordinaten — gewonnen wurde, als er Flächen aufsuchte, welche symmetrisch sind in bezug auf die Symmetrieebenen eines regel-

---

[1]) Geometr. Verwandtschaften Bd. IV Nr. 911, 912.

[2]) Zuerst bei *Clebsch*, dieses Journal Bd. 65, S. 365; dann *Reye*, 1. Aufl. der Geometrie der Lage Bd. II; *Cremona* a. a. O., Geometr. Verwandtsch. Bd. II, Nr. 381, Bd. IV, Nr. 825, 907.

mäßigen Polyeders [1]). Die Gleichung zeigt unmittelbar, daß die unendlich fernen Geraden der Koordinatenebenen auf der Fläche liegen; daher müssen in je 4 Parallelebenen zu ihnen die übrigen 24 Geraden sich befinden, in allen drei Fällen gleichartig in bezug auf die Realität. Von $z = h$ wird ein Geradenpaar ausgeschnitten, wenn

$$\begin{vmatrix} A, h, 0 \\ h, A, 0 \\ 0, 0, Ah^2 - B \end{vmatrix} = 0,$$

also wenn $h^2 = A^2$, $h^2 = \frac{B}{A}$; die beiden ersten Ebenen sind immer reell, die andern reell oder imaginär, je nachdem $\frac{B}{A} > 0$ oder < 0 ist. Über die Art der Geradenpaare in reellen Ebenen: reell, reell-imaginär (mit reellem Doppelpunkt) entscheidet $< 0, > 0$ des (nicht verschwindenden) Adjunkten der Elemente der Hauptdiagonale jener Determinante, also in den ersten Ebenen: von $A\,(A^3 - B) = A^2\left(A^2 - \frac{B}{A}\right)$, in den andern von $A^2 - \frac{B}{A}$, dabei in allen 4 Ebenen $< 0, > 0$ von $A^2 - \frac{B}{A}$. Wir haben daher 3 Fälle:

(1.) $\frac{B}{A} > A^2$, in allen 12 Ebenen reelle Geradenpaare: Gattung I,

(2.) $A^2 > \frac{B}{A} > 0$, in allen 12 Ebenen reell-imaginäre Geradenpaare: Gattung V,

(3.) $\frac{B}{A} < 0$, in den 6 reellen Ebenen reell-imaginäre Geradenpaare: Gattung IV.

Die paare Schale von V liegt innerhalb des Parallelepipeds, dessen Ecken die Koordinaten A mit den 8 Vorzeichenkombinationen haben. Im Übergangsfalle von I zu V: $B = A^3$ werden 4 von ihnen, nämlich $(-A, -A, -A)$, $(-A, A, A)$, $(A, -A, A)$, $(A, A, -A)$ Knotenpunkte, in denen die beiden Teile der Fläche zusammenhängen. Dadurch geschieht der Übergang von der Einschaligkeit zur Zweischaligkeit.

Der andere Übergang von V zu IV: $B = 0$ geschieht dadurch, daß die paare Schale sich auf einen isolierten Knotenpunkt (im Anfangspunkte) reduziert hat [2]). Die paaren Schalen der Flächen V mit kleineren Werten von $\frac{B}{A}$ werden von denen mit größeren eingeschlossen.

Goursat hält die beiden so wesentlich verschiedenen Gattungen V, IV, die eine zwei-, die andere einschalig, nicht auseinander, sondern unterscheidet nur: 27 reelle Geraden, 3 reelle und 24 imaginäre.

---

[1]) Annales de l'Ecole normale III. Serie Bd. 4 (1887).

[2]) Beide Übergänge sind, in bezug auf das Verhalten der Geraden, genauer in Kap. 8 meiner „Flächen 3. Ordnung" S. 383 α), S. 356 4) geschildert.

7. Es seien zwei spezielle Fälle hervorgehoben:

α) $A = 1$; dann bildet $B = 1$ den Übergang von I zu V und $B = 0$ den anderen. Jene Übergangsfläche ist:

$$2xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ oder: } \begin{vmatrix} 1 & 1-z & -y \\ -z & 1 & -x \\ -y & -x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

An sich ist diese Fläche mit 4 Knotenpunkten noch einschalig; von ihrem innerhalb des Parallelepipeds der Punkte mit echten Koordinaten (die Cosinus sein können) gelegenen Teile, der sich bei den V als paare Schale ablöst, werden *diejenigen Punkte* eingeschlossen, *deren Koordinaten Cosinus von Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke sein können.* Denn dazu ist erforderlich, daß das Quadrat des zweiten Eckensinus:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos a_3 & -\cos a_2 \\ -\cos a_3 & 1 & -\cos a_1 \\ -\cos a_2 & -\cos a_1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

ist.

Hieraus läßt sich ableiten, daß, wenn a_3 der kleinste der Flächenwinkel ist, $a_3 > 180^0 - (a_1 + a_2)$ oder $> a_1 + a_2 - 180^0$, je nachdem $a_1 + a_2 < 0$ der $> 180^0$ ist, wie das für eine dreiseitige Ecke notwendig ist [1]).

8. β) $A = 0, B > 0$; also Gattung I: $xyz = \frac{1}{2} B$.

Das ist die von *Steiner* [2]) gefundene *Fläche 3. Ordnung und 3. Klasse, deren Berührungsebenen vom Koordinaten-Dreiflach,* dessen (erster) Eckensinus Σ sei, *Tetraeder vom (positiven) Inhalt* $I = \frac{9}{4} B\Sigma$ *abschneiden.* Denn zunächst ist die Tangentialgleichung dieser Fläche $uvw = -\frac{\Sigma}{6I}$, oder homogen:

$F(u,v,w,r) = uvw + \frac{\Sigma}{6I} r^3 = 0$, woraus die Koordinaten des Berührungspunktes sich ergeben: $F'(u)$, $F'(v)$, $F'(w)$, $F'(r)$, unhomogen:

$$\frac{2I}{\Sigma} vw = -\tfrac{1}{3} u, -\tfrac{1}{3} v, -\tfrac{1}{3} w.$$

Daraus folgt wegen der Tangentialgleichung die obige Punktgleichung, sowie, daß *der Berührungspunkt der Schwerpunkt des von der Berührungsebene aus dem Dreiflach ausgeschnittenen Dreiecks ist*; dies führt auch zu einer (ausführbaren) Konstruktion der Ebene aus dem Punkte.

Die unendlich fernen Punkte der Achsen sind *biplanare Doppelpunkte* der Fläche, und längs ihrer Verbindungslinien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *oskulieren* die Ebenen α, β, γ des Dreiflachs, wobei die zweite und dritte Gerade in dem einen und andern Sinne der unendlichen Entfernung neben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ liegen. Der zerfallende Anschmiegungs-

---

[1]) Zeitschr. für math. und naturw. Unterr. Bd 49, S. 45.

[2]) Gesammelte Werke Bd. II, S. 291/92; meine „Maxima und Minima in der elementaren Geometrie" (1910) S. 16, insbesondere Satz 168 (mit der durch geometrische Betrachtungen erhaltenen Schwerpunkts-Eigenschaft) und 169. — Die Fläche fällt unter Section XXI in *Cayley's* Memoir on Cubic Surfaces (Philos. Transactions für 1869) S. 231.

kegel eines der Doppelpunkte, (dessen Kanten drei vereinigte Schnitte mit der Fläche in ihm haben), besteht aus den beiden durch ihn gehenden Ebenen α, β, γ, nicht wie *Cayley* sagt, aus einer von ihnen und der Ebene $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$. Denn die Strahlen in dieser Ebene durch einen Doppelpunkt haben in ihm nur zwei vereinigte Schnitte, den dritten auf der gegenüberliegenden Geraden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$; und ungleichartiges Verhalten der drei Ebenen α, β, γ ist gar nicht gerechtfertigt.

Weitere Geraden der Fläche müssen je 4 Geradenpaare in Ebenen durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bilden; jede Parallelebene etwa zu α, die von α verschieden ist, schneidet aber eine nicht zerfallende Hyperbel aus; die 4 Ebenen vereinigen sich also in α, die 8 Geraden in die beiden Nachbargeraden von $\mathfrak{a}$. *In* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *haben sich also je* 9 *Geraden vereinigt.*

Die positiven Kanten des Dreiflachs seien a', b', c', die negativen a'', b'', c''; also werden positive Tetraeder von den Ecken $a'\,b'\,c'$, $a'\,b''\,c''$, $a''\,b'\,c''$, $a''\,b''\,c'$ abgeschnitten. In diesen Ecken liegen die 4 *Mäntel* der Fläche — in „Maxima und Minima" noch Schalen genannt. Die in $a'\,b'\,c'$ und $a'\,b''\,c''$ gelegenen oskulieren sich längs desjenigen Teils von $\mathfrak{a}$, welcher innerhalb der Kantenwinkel $b'\,c', b''\,c''$ dieser Ecken liegt. In jedem Punkte von $\mathfrak{a}$ oskulieren sich zwei Mäntel: man suche die Scheitelwinkel in α auf, in denen er liegt, und die auf derselben Seite von α befindlichen Ecken über ihnen und ihre Mäntel. In den Knotenpunkten auf $\mathfrak{a}$ findet der Wechsel von $a'\,b'\,c'$; $a'\,b''\,c''$ zu $a''\,b'\,c''$; $a''\,b''\,c'$ statt. Durch diese Oskulationen hängen die Mäntel zusammen und bilden *eine* Schale. Ein ebener Schnitt — mit drei reellen Wendeasymptoten — besteht aus drei hyperbolischen Ästen in den Scheitelwinkeln des angeschnittenen Dreiecks und eventuell einem Oval in seinem Innern.

9. Für ein dreirechtwinkliges Dreiflach lehrt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{B^2}{x^4 y^4} > 0\,,$$

daß die Fläche durchweg positiv gekrümmt ist; Affinität zwischen einem beliebigen und einem dreirechtwinkligen Dreiflach, bei welcher die Konstanz des Inhalts des abgeschnittenen Tetraeders, ferner die Art der dreipunktigen Tangenten und der Krümmung erhalten bleiben, beweist, daß die Fläche auch im allgemeinen Falle *durchweg positiv gekrümmt ist.* Der Scheitel O, als Schnittpunkt der drei Berührungsebenen α, β, γ, liegt auf der konvexen Seite.

Die zu den verschiedenen Werten von I (positiven und negativen) gehörigen Flächen sind ähnlich und in bezug auf O ähnlich gelegen, bilden einen Büschel mit den dreimal drei unendlich fernen Geraden als Basis. Durch einen Punkt P innerhalb $a'\,b'\,c'$ geht daher der Mantel einer von ihnen; π sei seine Berührungsebene. Wir vergleichen mit solchen andere Ebenen des Bündels P, welche von $a'\,b'\,c'$ Tetraeder abschneiden: sie werden von der nach P parallel verlegten Ecke $a'\,b'\,c'$ oder ihre Parallelebenen durch O von dieser Ecke selbst ausgeschlossen. Eine solche Ebene σ schneidet vom Mantel auf der Seite von O ein Segment ab, welches (mindestens) eine zu ihr parallele Berührungsebene τ hat, die näher an O liegt. Daher ist Tetraeder $O\tau < O\sigma$, andererseits $= O\pi$; also $O\pi < O\sigma$.

Die Berührungsebene des durch P gehenden Mantels in diesem Punkte schneidet unter denjenigen Ebenen des Bündels P, welche überhaupt Tetraeder von a' b' c' abschneiden, das kleinste ab.

Die Ebene dieses Minimums ist, wie gesagt, zu konstruieren, während z. B. die Ebene durch P, welche das kleinste Dreieck aus dem Dreiflach ausschneidet, nicht zu konstruieren ist [1]).

[1]) Vgl. den Aufsatz: Zwei Minimalprobleme II, dieses Journal Bd. 152, S. 99.

Arithmetische Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten.

Von Herrn *Kurt Hensel* in Marburg.

Ist p eine beliebige Primzahl, und

$$m = m_i\, p^i + m_{i+1}\, p^{i+1} + \cdots + m_r\, p^r = 0, o \ldots o\, m_i \ldots m_r$$

die reduzierte p-adische Darstellung einer ganzen positiven Zahl m im p-adischen Zahlensysteme ($0 \leqq m_h < p$), so läßt sich ihr Anfangsglied $m_i\, p^i$ modulo p^{i+1} stets in der folgenden für viele Zwecke brauchbaren Form schreiben:

$$(1.) \qquad m = \frac{P_m}{P_{m-1}} \cdot (-p)^{\frac{s_{m-1} - s_m + 1}{p-1}} + \cdots = m_i\, p^i + \cdots.$$

Hier bedeutet

$$P_m = m_i!\, m_{i+1}! \ldots m_r!$$

das Faktoriellenprodukt aller Ziffern m_h und

$$s_m = m_i + m_{i+1} + \cdots + m_r$$

die Ziffernsumme von m, während P_{m-1} und s_{m-1} dieselbe Bedeutung für die nächstkleinere Zahl

$$m - 1 = (p-1) + (p-1)\, p + \cdots + (p-1)\, p^{i-1} + (m_i - 1)\, p^i + m_{i+1}\, p^{i+1} + \cdots$$
$$= p-1, p-1 \ldots p-1\, m_i - 1\, m_{i+1} \ldots m_r$$

haben, so daß also:

$$P_{m-1} = ((p-1)!)^i\, (m_i - 1)!\, m_{i+1}! \ldots m_r! \equiv \frac{(-1)^i}{m_i} P_m \pmod p,$$

$$s_{m-1} = i\,(p-1) + (m_i - 1) + m_{i+1} + \cdots + m_r = i\,(p-1) + s_m - 1$$

ist. Hieraus geht die Richtigkeit der Gleichung (1.) unmittelbar hervor.

Aus ihr folgt für das Produkt $m!$ der m ersten Zahlen sofort die Gleichung:

$$(2.) \qquad m! = P_m\, (-p)^{\frac{m - s_m}{p-1}} + \cdots,$$

in welcher die Ordnungszahl des Anfangsgliedes zuerst von *Legendre*, der Koeffizient P_m von *Stickelberger* auf einem anderen Wege bestimmt wurde. Ich möchte dieses Resultat jetzt zur Ableitung einiger arithmetischen Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten benutzen.

Enthält m in der reduzierten p-adischen Darstellung $m_0, m_1 \ldots m_r$ allgemein eine Ziffer i μ_i Male, so kann man die Gleichung (2.) offenbar auch in der Form:

$$(2a.) \qquad m! = \left(\prod_2^{p-1} (i!)^{\mu_i}\right) (-p)^{\frac{m - s_m}{p-1}} + \cdots$$

schreiben, wo stets $0! = 1$ zu setzen ist, und wo die Exponenten μ_i wegen des kleinen *Fermat*schen Satzes immer durch ihren kleinsten Rest modulo $p-1$ ersetzt werden können.

Es sei nun

$$m = a + b + \cdots + d$$

irgendeine Zerlegung von m in positive Summanden. Dann ergibt sich aus (2.) und (2a.) unmittelbar die folgende Darstellung des zu ihr gehörigen Polynomialkoeffizienten:

$$(3.)\quad \binom{m}{a, b, \ldots, d} = \frac{m!}{a!\,b!\ldots d!} = \frac{P_m}{P_a P_b \ldots P_d}(-p)^{\frac{s_a+\cdots+s_d-s_m}{p-1}} + \ldots$$
$$= \prod_{2}^{p-1}(i!)^{\mu_i-(\alpha_i+\cdots+\delta_i)}\cdot(-p)^{\frac{s_a+\cdots+s_d-s_m}{p-1}} + \ldots,$$

wo $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \delta_i$ angeben, wie oft eine Ziffer i in der reduzierten p-adischen Darstellung von $a, b, \ldots, d$ vorkommt.

Sind

$$a = a_0, a_1 \ldots a_r; \quad b = b_0, b_1 \ldots b_r; \ldots; d = d_0, d_1 \ldots d_r; \quad m = m_0, m_1 \ldots m_r$$

diese reduzierten p-adischen Darstellungen von $a, b, \ldots d, m$, so liefert die Überführung der nicht reduzierten Zahl $(a + b + \cdots + d)$ mit den nicht negativen Ziffern $(a_i + b_i + \cdots + d_i)$ in ihre reduzierte Form $m = m_0, m_1 \ldots m_r$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 + \cdots + d_0 &= m_0 + \varepsilon_0 p \\ a_1 + b_1 + \cdots + d_1 &= m_1 + \varepsilon_1 p - \varepsilon_0 \\ &\vdots \\ a_r + b_r + \cdots + d_r &= m_r + \varepsilon_r p - \varepsilon_{r-1}, \end{aligned}$$

wo die nicht negativen Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ den Übertrag auf die erste, zweite, . . ., r-te Stelle bei jener Überführung bedeuten. Durch Multiplikation jener Gleichungen mit $1, p, \ldots, p^r$ und Addition derselben ergibt sich $\varepsilon_r = 0$, und durch Addition dieser Gleichungen selbst erhält man für den Gesamtübertrag $s_\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{r-1}$:

$$s_\varepsilon = \frac{s_a + s_b + \cdots + s_d - s_m}{p-1};$$

die Gleichung (3.) geht also über in

$$(4.)\quad \binom{m}{a, b, \ldots, d} = \frac{P_m}{P_a P_b \cdots P_d}(-p)^{s_\varepsilon} = \Pi\,(i!)^{\mu_i-(\alpha_i+\cdots+\delta_i)}\cdot(-p)^{s_\varepsilon}.$$

Da jene Anzahl s_ε nie negativ sein kann, ist hierdurch die Ganzzahligkeit aller Polynomialkoeffizienten arithmetisch bewiesen.

Dann und nur dann ist jener Polynomialkoeffizient also eine Einheit modulo p, wenn $s_\varepsilon = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{r-1} = 0$ ist, wenn also für alle Einzelziffern $a_i, \ldots, d_i, m_i$ die Gleichungen:

$$a_i + b_i + \cdots + d_i = m_i$$

sämtlich erfüllt sind.

Als Beispiel werde der Binomialkoeffizient

$$\binom{m}{a, b, c, d} = \frac{14939!}{882!\,3523!\,6549!\,3910!}$$

für den Bereich der Primzahl 5 untersucht. Die reduzierten pentadischen Darstellungen der Zahlen $a, \ldots, d$ werden:

$$a = 882 = 2{,}10210,\quad b = 3523 = 3{,}40301,\quad c = 6549 = 4{,}41202,$$
$$d = 3910 = 0{,}21111;$$

also erhält man für m die nicht reduzierte und die reduzierte pentadische Zahl:

$$m = 14864 = 9{,}\underset{1\,2\,0\,1\,0}{11\,2\,8\,2\,4} = 4{,}24334;$$

demnach ergibt sich $s_\varepsilon = 1 + 2 + 0 + 1 + 0 = 4$. Ersetzt man nun die Zahlen m, a, b, c, d durch ihre reduzierten pentadischen Darstellungen und zählt in ihnen die Ziffern 2, 3, 4 ab, so ergibt sich für den Polynomialkoeffizienten das folgende Anfangsglied:

$$\frac{4{,}24334\,!}{2{,}10210\,!\;3{,}40301\,!\;4{,}41202\,!\;0{,}21111} = (2!)^{1-5}\cdot(3!)^{2-2}\cdot(4!)^{3-3}(-5)^4 + \cdots$$
$$= 5^4 + \cdots.$$

Es sei nun p^ν eine beliebige Potenz von p und

$$a = a^{(0)} + p^\nu a^{(1)},\ \ldots, d = d^{(0)} + p^\nu d^{(1)};\ m = m^{(0)} + p^\nu m^{(1)}$$

je eine Zerlegung der p-adischen Zahlen $a, \ldots, d, m$ in Teilzahlen nach dem Modul p^ν, so daß z. B.:

$$m = m^{(0)} + p^\nu m^{(1)} = (m_0 + m_1 p + \cdots + m_{\nu-1} p^{\nu-1}) + p^\nu (m_\nu + m_{\nu+1} p + \cdots)$$
$$= m_0, m_1 \ldots m_{\nu-1} + p^\nu m_\nu, m_{\nu+1} \ldots m_r$$

ist. Dann ist stets:

$$a^{(0)} + b^{(0)} + \cdots + d^{(0)} \geqq m^{(0)},\ a^{(1)} + b^{(1)} + \cdots + d^{(1)} \leqq m^{(1)},$$

wo das eine Gleichheitszeichen das andere notwendig nach sich zieht. Ich nehme nun an, daß für diese Zerlegung:

$$a^{(0)} + \cdots + d^{(0)} = m^{(0)},\ \text{also}\ a^{(1)} + \cdots + d^{(1)} = m^{(1)}$$

ist. Da dann offenbar stets die Gleichungen:

$$P_a = P_{a^{(0)}} \cdot P_{a^{(1)}}, \ldots,\quad P_m = P_{m^{(0)}} P_{m^{(1)}}$$

bestehen, und wegen der letzten Voraussetzung:

$$s_\varepsilon = s_{\varepsilon^{(0)}} + s_{\varepsilon^{(1)}}$$

ist, wenn $s_{\varepsilon^{(0)}}$ und $s_{\varepsilon^{(1)}}$ die Gesamtüberträge bei der Überführung der nicht reduzierten Zahlen $a^{(0)} + \cdots + d^{(0)}$ und $a^{(1)} + \cdots + d^{(1)}$ in die reduzierten Formen $m^{(0)}$ und $m^{(1)}$ sind, so folgt aus (4.) die Gleichung:

$$\binom{m}{a, b, \ldots, d} = \frac{P_{m^{(0)}}}{P_{a^{(0)}} \ldots P_{d^{(0)}}} (-p)^{s_{\varepsilon^{(0)}}} \cdot \frac{P_{m^{(1)}}}{P_{a^{(1)}} \ldots P_{d^{(1)}}} (-p)^{s_{\varepsilon^{(1)}}} + \cdots,$$

d. h. es besteht immer die Beziehung:

$$(5.)\quad \binom{m}{a, b, \ldots, d} = \binom{m^{(0)}}{a^{(0)}\, b^{(0)} \ldots d^{(0)}} \cdot \binom{m^{(1)}}{a^{(1)}\, b^{(1)} \ldots d^{(1)}} + \cdots,$$

und das entsprechende Resultat besteht natürlich bei der additiven Zerlegung von $a, \ldots, d, m$ in je drei oder mehr Teilzahlen.

In unserem Beispiele erhält man so bei der Zerlegung von $a, \ldots, d, m$ in je drei Teilzahlen nach den Moduln $1, p^2, p^5$ die Gleichung:

$$\frac{4_{,24334}!}{2_{,10210}!\ 3_{,40301}!\ 4_{,41202}!\ 0_{,21111}!}$$

$$= \frac{4_{,24}!}{2_{,10}!\ 3_{,40}!\ 4_{,41}!\ 0_{,21}!} \cdot \frac{3_{,3}!}{2_{,1}!\ 3_{,0}!\ 2_{,0}!\ 1_{,1}!} \cdot \frac{4!}{0!\ 1!\ 2!\ 1!} + \cdots$$

$$= ((2!)^3 (-1)(-5)^3) \cdot ((2!)^2 (-5))((2!)^3 (-1)) + \cdots = 5^4 + \cdots,$$

welche mit der oben abgeleiteten übereinstimmt.

Für Binomialkoeffizienten:

$$\binom{m}{a} = \binom{m}{a, b}; \quad (a+b=m),$$

besteht hiernach bei einer Zerlegung

$$m = m^{(0)} + p^\nu m^{(1)}, \quad a = a^{(0)} + p^\nu a^{(1)}$$

unter der Voraussetzung $a^{(0)} \leqq m^{(0)}$, welche ja notwendig und hinreichend dafür ist, daß $a^{(0)} + b^{(0)} = m^{(0)}$, $a^{(1)} + b^{(1)} = m^{(1)}$ ist, stets die Gleichung:

$$(6.) \qquad \binom{m}{a} = \binom{m^{(0)}}{a^{(0)}} \cdot \binom{m^{(1)}}{a^{(1)}} + \cdots = \binom{m^{(0)}}{a^{(0)}} \binom{\left[\frac{m}{p^\nu}\right]}{\left[\frac{a}{p^\nu}\right]} + \cdots.$$

Diese Voraussetzung ist z. B. immer dann erfüllt, wenn $a^{(0)} = 0$ ist, wenn also $a = p^\nu a^{(1)}$ ein Multiplum von p^ν ist. In diesem Falle besteht also stets die Gleichung:

$$(6a.) \qquad \binom{m}{p^\nu a^{(1)}} = \binom{\left[\frac{m}{p^\nu}\right]}{a^{(1)}}.$$

Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen.

Von Herrn *Helmut Hasse* in Kiel.

Inhalt.

Seite

Einleitung 12
§ 1. Darstellbarkeit eines Komplexes durch einen anderen 14
§ 2. Diskussion der Darstellbarkeitskriterien 20
§ 3. Darstellbarkeit der Null durch einen Komplex 24
§ 4. Multiplikative Äquivalenz der Komplexe 30
§ 5. Die Komplexscharen 33
§ 6. Diskussion der Darstellbarkeitskriterien für die Null 39

Einleitung.

In zwei vorangehenden Arbeiten [1]) habe ich, gestützt auf die *Hensel*sche Theorie der p-adischen Zahlen, die beiden Hauptprobleme aus der Theorie der quadratischen Formen behandelt, nämlich die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen einerseits für die Darstellbarkeit einer gegebenen Zahl m durch eine quadratische Form f, andererseits für die Äquivalenz zweier Formen f und g, wobei als Bereich für alle auftretenden Größen (Koeffizienten, Variable, dargestellte Zahlen) der Körper $K(1)$ aller rationalen Zahlen zugrundegelegt wurde. Beide Probleme sind Spezialfälle eines allgemeineren, das ich in dieser Arbeit zunächst behandeln will.

Bezeichnen nämlich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die symmetrischen, quadratischen Matrizen, die aus den rationalen Koeffizienten zweier quadratischen Formen entspringen, so frage ich nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen einer Matrizengleichung:

$$S' \mathfrak{A} S = \mathfrak{B}, \tag{1.}$$

wo S irgendeine (rechteckige) Matrix in $K(1)$ und S' ihre transponierte ist [2]). In der Matrizentheorie nennt man im Falle des Bestehens einer Gleichung (1.) die Matrix $\mathfrak{B}$ unter $\mathfrak{A}$ enthalten, in der Theorie der quadratischen Formen heißt $\mathfrak{B}$

---

[1]) Dieses Journ. Bd. 152, S. 120 ff. und S. 205 ff., im folgenden zitiert mit H I und H II.

[2]) Ich bezeichne im folgenden durchweg die aus quadratischen Formen entspringenden (symmetrischen) Matrizen durch große deutsche Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, die aus Substitutionen entspringenden mit großen lateinischen Buchstaben $P, Q, S, \ldots$ und rede auch kurz von der „Form“ $\mathfrak{A}$ bzw. der „Substitution“ S.

durch $\mathfrak{A}$ darstellbar. Ich verwende die letztere Bezeichnung und sage unter Hinzufügung des zugrundegelegten Bereichs: $\mathfrak{B}$ *ist durch* $\mathfrak{A}$ *in* $K(1)$ *darstellbar*, oder auch: $\mathfrak{A}$ *geht durch die Substitution* S *in* $\mathfrak{B}$ *über*. Da sich meine Entwicklungen fast ausschließlich im Körper $K(1)$ bewegen werden, lasse ich den Zusatz: *in* $K(1)$, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, auch fort.

Ich nenne eine Matrix von N Zeilen und M Spalten *vom Typus* $N \cdot M$. Ist dann $\mathfrak{A}$ vom Typus $N \cdot N$, $\mathfrak{B}$ vom Typus $M \cdot M$, so darf man offenbar ohne Beschränkung S vom Typus $N \cdot M$ annehmen, da etwaige weitere Zeilen von S bei der Komposition $S' \mathfrak{A} S$ nicht benutzt werden, weitere Spalten in $\mathfrak{B}$ Nullreihen erzeugen, also beidesmal weggelassen werden können, und fehlende Zeilen und Spalten in S durch Nullen ausgefüllt werden dürfen.

Eine weitere Vereinfachung kann man durch passende Wahl von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erzielen. Sind n und m der *Rang* von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so kann man bekanntlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch umkehrbare Substitutionen P und Q aus $K(1)$ in Formen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ vom Typus $n \cdot n$ und $m \cdot m$ und Rang n und m transformieren:

$$P' \mathfrak{A} P = \overline{\mathfrak{A}}; \quad Q' \mathfrak{B} Q = \overline{\mathfrak{B}}.$$

Dann folgt aus (1.):

$$Q' S' P'^{-1} \overline{\mathfrak{A}} P^{-1} S Q = (P^{-1} S Q)' \overline{\mathfrak{A}} (P^{-1} S Q) = \overline{S}' \overline{\mathfrak{A}} \overline{S} = \overline{\mathfrak{B}}$$

und umgekehrt. Daher darf man ohne Beschränkung $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vom Typus $n \cdot n$ und $m \cdot m$ und S vom Typus $n \cdot m$ annehmen, wo n und m der Rang von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Dies soll im folgenden bei den Beweisen stets geschehen, ohne es immer ausdrücklich hervorzuheben, während die Resultate natürlich unabhängig von dieser Beschränkung sind.

Ersichtlich sind die beiden in H I und H II behandelnden Probleme Spezialfälle des eben genannten allgemeinen.

Ist nämlich einerseits der Rang m von $\mathfrak{B}$ gleich 1, sodaß also $\mathfrak{B} = (b)$ gesetzt werden kann ($b \neq 0$), so folgt offenbar aus dem Bestehen von (1.), daß b im Sinne von H I durch die Form $\mathfrak{A}$ in $K(1)$ darstellbar ist und umgekehrt.

Ist andererseits $m = n$, so folgt aus (1.), daß auch S vom Range n sein muß, und dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im Sinne von H II in $K(1)$ äquivalent.

Ich stelle im folgenden zunächst die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen einer Gleichung (1.) in $K(1)$ bei gegebenem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf (§ 1) und ziehe daraus einige Folgerungen betreffend die Mannigfaltigkeit der dargestellten $\mathfrak{B}$ bei gegebenem $\mathfrak{A}$ und der darstellenden $\mathfrak{A}$ bei gegebenem $\mathfrak{B}$ (§ 2). Sodann behandle ich in ganz entsprechender Weise den bisher ausgeschlossenen Fall, daß die Matrix $\mathfrak{B}$ identisch Null ist, d. h. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen einer Matrizengleichung:

$$(2.) \qquad S' \mathfrak{A} S = 0$$

in $K(1)$ mit nicht identisch verschwindendem $\mathfrak{A}$ und S (§ 3). Diese Untersuchung stellt sich als naturgemäße Verallgemeinerung der in H I behandelten Darstellbarkeit der Null in $K(1)$ heraus. Sie steht in engem Zusammenhang mit der von *Minkowski* [1]) behandelten Frage, wann eine quadratische Form einem rationalen Mul-

[1]) Ges. Abh. I, S. 219 ff. oder dieses Journ. Bd. 106, S. 5 ff.

tiplum einer anderen in $K(1)$ äquivalent ist. Wie nämlich die Kriterien für die Möglichkeit von (1.) sich lediglich durch das in H II gewonnene *vollständige Invariantensystem gegen rationale Transformation*, d. h. durch die Invarianten der *Komplexe* [1]) von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ausdrücken lassen, so gestatten die Kriterien für die Möglichkeit von (2.) eine Darstellung allein durch das *vollständige Invariantensystem gegen rationale Transformation und Multiplikation.* Ich leite zunächst letzteres mittels der Ergebnisse von H II her (§4), untersuche dann die aus ihm entspringende Einteilung aller Komplexe in „*Komplexscharen*" (§ 5) und diskutiere schließlich die in § 3 gewonnenen Kriterien für die Möglichkeit von (2.) auf Grund der Beziehung zu den Komplexscharen, analog wie in § 2 die Kriterien für (1.) auf Grund der Beziehung zu den Komplexen diskutiert wurden (§ 6).

Durch die vollständige Beantwortung der genannten, in größtmöglicher Allgemeinheit gestellten Fragen wird die Theorie der quadratischen Formen (symmetrischen Matrizen) in $K(1)$ zu einem gewissen Abschluß gebracht. Die beiden schon von *Gauß* hervorgehobenen Hauptprobleme (Darstellbarkeit und Äquivalenz) erweisen sich als Spezialfälle des allgemeinst-möglichen Darstellbarkeitsproblems (1.) einer Form durch eine andere, zu dem als zweites allgemeines Problem noch die höhere Darstellbarkeit der Null (2.) hinzutritt.

§ 1. Darstellbarkeit eines Komplexes durch einen anderen.

Wie sich aus einer entsprechenden Überlegung, wie S. 13 ergibt, hängt die Lösbarkeit der Gleichung

$$S' \mathfrak{A} S = \mathfrak{A}^{(1)}$$

nur von den Komplexen C und $C^{(1)}$ ab, denen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^{(1)}$ angehören. Man kann daher von einer Darstellbarkeit des Komplexes $C^{(1)}$ durch den Komplex C reden, die so zu verstehen ist, daß jede Form aus $C^{(1)}$ durch jede aus C darstellbar ist. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür müssen sich allein durch die vollständigen Invariantensysteme [2])

$$n, d, J, (c_p) \text{ von } C \quad \text{und} \quad n^{(1)}, d^{(1)}, J^{(1)}, (c_p^{(1)}) \text{ von } C^{(1)}$$

ausdrücken lassen.

Zur Aufstellung dieser Bedingungen ist folgende Bemerkung von Wichtigkeit: Sind $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ zwei Formen aus den Komplexen $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ mit den Invarianten $n^{(1)}$ und $n^{(2)}$, so ist der durch

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^{(2)} \end{pmatrix}$$

bestimmte Komplex C von der speziellen Wahl der Formen $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ aus $C^{(1)}$ bzw. $C^{(2)}$ unabhängig. Denn gehen $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ durch die umkehrbaren Substitutionen $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ in $\mathfrak{B}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{B}^{(2)}$ über, so geht $\mathfrak{A}$ durch die ebenfalls umkehrbare Substitution

$$P = \begin{pmatrix} P^{(1)} & 0 \\ 0 & P^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}^{(2)} \end{pmatrix}$$

---

[1]) H II, S. 218.
[2]) H II, S. 217.

über; $\mathfrak{B}$ gehört also ebenfalls zu C. Für die Invariante n des Komplexes C gilt dabei:

$$n = n^{(1)} + n^{(2)}.$$

Durch die Komplexe $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ der Invarianten $n^{(1)}$ und $n^{(2)}$ wird also ein Komplex C der Invariante $n = n^{(1)} + n^{(2)}$ eindeutig definiert, den ich durch

$$C = C^{(1)} + C^{(2)}$$

bezeichne. Ist eine der Invarianten $n^{(1)}$, $n^{(2)}$, etwa $n^{(2)} = 0$, so enthält der Komplex $C^{(2)}$ nur identisch verschwindende Formen. Ich setze dann $C^{(2)} = 0$. Dann ist die Gleichung $C = C^{(1)} + 0$ gleichbedeutend mit $C = C^{(1)}$. Ich beweise jetzt:

Satz 1. *Ein Komplex $C^{(1)}$ ist dann und nur dann durch einen Komplex C darstellbar, wenn die Komplexgleichung*

$$C = C^{(1)} + C^{(2)} \tag{3.}$$

eine Lösung $C^{(2)}$ hat.

Beweis: a) Hat die Gleichung (3.) eine Lösung $C^{(2)}$, so ist für irgendzwei Formen $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ aus $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{4.}$$

eine Form aus C, die durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} E_{n^{(1)}} \\ 0 \end{pmatrix}$$ [1])

in $\mathfrak{A}^{(1)}$ übergeht; $C^{(1)}$ ist also durch C darstellbar.

b) Ist umgekehrt $C^{(1)}$ durch C darstellbar, haben C und $C^{(1)}$ die Invarianten n und $n^{(1)}$ und sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^{(1)}$ zwei Formen aus C bzw. $C^{(1)}$, so existiert eine Matrix S vom Typus $n \cdot n^{(1)}$, so daß

$$S' \mathfrak{A} S = \mathfrak{A}^{(1)} \tag{5.}$$

ist. Ist r der Rang von S, so ist nach einem bekannten Satze der Matrizentheorie

$$n^{(1)} \leqq r \quad \text{und} \quad n^{(1)} \leqq n.$$

Andererseits ist, da S vom Typus $n \cdot n^{(1)}$:

$$r \leqq n^{(1)}.$$

Also ist $r = n^{(1)}$. Dann läßt sich bekanntlich zu S eine komplementäre Matrix T vom Typus $n \cdot (n - n^{(1)})$ und Rang $n - n^{(1)} = n^{(2)}$ so angeben, daß

$$U = (S \quad T)$$

eine quadratische Matrix vom Typus $n \cdot n$ und Rang n, also eine umkehrbare Substitution ist. Aus (5.) folgt dann:

$$U' \mathfrak{A} U = \begin{pmatrix} S' \\ T' \end{pmatrix} \mathfrak{A} (S \quad T) = \begin{pmatrix} S' \mathfrak{A} S & S' \mathfrak{A} T \\ T' \mathfrak{A} S & T' \mathfrak{A} T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{C}' & \mathfrak{B} \end{pmatrix}.$$

Wendet man auf $U' \mathfrak{A} U$ die umkehrbare Substitution

$$V = \begin{pmatrix} E & -(\mathfrak{A}^{(1)})^{-1} \mathfrak{C} \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

---

[1]) E_ν bedeutet stets die Einheitsmatrix vom Typus $\nu \cdot \nu$; wenn kein Index beigefügt ist, versteht sich der Typus von selbst. Ich unterscheide hierbei nicht gemäß S. 12 Anm. 2 zwischen Formen und Substitutionen. Ähnlich vertritt 0 in den Matrizen stets ein Nullensystem von entsprechendem Typus.

an, so wird:

$$\overline{\mathfrak{A}} = (UV)'\,\mathfrak{A}\,(UV) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\,\mathfrak{C}'\,(\mathfrak{A}^{(1)})^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{C}' & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -\,(\mathfrak{A}^{(1)})^{-1}\,\mathfrak{C} \\ 0 & E \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{B} - \mathfrak{C}'\,(\mathfrak{A}^{(1)})^{-1}\,\mathfrak{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Die Form $\overline{\mathfrak{A}}$ gehört wegen der Umkehrbarkeit von UV zu C. Daher folgt, aus der letzten Gleichung, daß der Komplex $C^{(2)}$, dem $\mathfrak{A}^{(2)} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C}'\,(\mathfrak{A}^{(1)})^{-1}\,\mathfrak{C})$ angehört, Lösung von (3.) ist, w. z. b. w.

Aus dem damit bewiesenen Satz 1 erhält man leicht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit von $C^{(1)}\{n^{(1)}, d^{(1)}, J^{(1)}, (c_p^{(1)})\}$ durch $C\{n, d, J, (c_p)\}$.

Ich nehme den Spezialfall $C^{(1)} = 0$ vorweg. Dann hat die Komplexgleichung (3.) stets die eine einzige Lösung $C^{(2)} = C$. Der Nullkomplex ist also durch jeden Komplex C darstellbar. In der Tat stellt jede Form $\mathfrak{A}$ durch die identisch verschwindende Substitution $S = 0$ eine identisch verschwindende Form dar. Die Frage, unter welchen Bedingungen solche Darstellungen identisch verschwindender Formen (Darstellungen der Null) auch durch nicht identisch verschwindende Substitutionen S möglich sind, werde ich in § 3 behandeln.

Sei also von jetzt an $C^{(1)} \neq 0$. Ist dann $C^{(2)}\{n^{(2)}, d^{(2)}, J^{(2)}, (c_p^{(2)})\}$ Lösung von (3.), so bestehen für die Invarianten von $C, C^{(1)}, C^{(2)}$ die Beziehungen

$$n = n^{(1)} + n^{(2)}\,, \tag{6.}$$
$$d = \text{Kern von } d^{(1)}\,d^{(2)}, \tag{7.}$$
$$J = J^{(1)} + J^{(2)}\,, \tag{8.}$$
$$c_p \equiv c_p^{(1)}\,c_p^{(2)} \left(\frac{-1, -1}{p}\right)\left(\frac{d^{(1)}, d^{(2)}}{p}\right) \text{ [1]}. \tag{9.}$$

(6.) war schon oben als richtig erkannt, (7.) und (8.) folgen unmittelbar aus (4.) für geeignet gewählte $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$ aus $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ebenso (9.), das schon in H II, S. 217, Gl. (24.) aufgestellt ist.

Für die Invarianten von $C^{(2)}$ ergibt sich daraus die eindeutig bestimmte Lösung:

$$\begin{cases} n^{(2)} = n - n^{(1)}\,, \\ d^{(2)} = \text{Kern von } dd^{(1)}\,, \\ J^{(2)} = J - J^{(1)}\,, \\ c_p^{(2)} \equiv c_p\,c_p^{(1)} \left(\dfrac{-1, -1}{p}\right)\left(\dfrac{d^{(1)}, dd^{(1)}}{p}\right). \end{cases} \tag{10.}$$

Dann und nur dann, wenn zu dem durch (10.) bestimmten Invariantensystem $n^{(2)}, d^{(2)}, J^{(2)}, (c_p^{(2)})$ ein wirklicher Komplex $C^{(2)}$ gehört, ist die Komplexgleichung (3.) lösbar, also $C^{(1)}$ durch C darstellbar.

Nun gehört nach H II, Satz 9, S. 220 zu diesem Invariantensystem dann und nur dann ein wirklicher Komplex, wenn die dortigen Bedingungen (37.) und für $n^{(2)} = 1$ bzw. 2 außerdem (37 a.) bzw. (37 b.) erfüllt sind. Damit entspringen

---

[1]) Das Zeichen: $\equiv$ bedeutet wie in H I, H II: *für alle p (einschl. p_∞) gleich.*

aus (10.) folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit von $C^{(1)}$ durch C:

$$(11.) \qquad 0 \leqq n - n^{(1)} \leqq n - 1 \quad ,$$

da $n^{(1)}$ nach Annahme über $C^{(1)}$ positiv und $n^{(2)}$ jedenfalls nicht negativ ist; ferner nach H II, (37.):

$$(12.) \qquad 0 \leqq J - J^{(1)} \leqq n - n^{(1)},$$

$$(13.) \qquad d_{p_\infty}\, d^{(1)}_{p_\infty} = (-1)^{J - J^{(1)}} \quad ,$$

$$(14.) \qquad c_{p_\infty}\, c^{(1)}_{p_\infty} \left(\frac{-1,-1}{p_\infty}\right)\left(\frac{d^{(1)}, dd^{(1)}}{p_\infty}\right) = (-1)^{\frac{(J-J^{(1)})\,(J-J^{(1)}+1)}{2}+1} \quad ,$$

$$(15.) \qquad \prod_p c_p\, c^{(1)}_p \left(\frac{-1,-1}{p}\right)\left(\frac{d^{(1)}, dd^{(1)}}{p}\right) = +1,$$

und nach H II, (37b.) bzw. (37a.):

$$(16.) \text{ für } n - n^{(1)} = 2 : \; c_p\, c^{(1)}_p \left(\frac{-1,-1}{p}\right)\left(\frac{d^{(1)}, dd^{(1)}}{p}\right) = +1 \text{ für } \left(\frac{-dd^{(1)}}{p}\right) = +1,$$

$$(17.) \quad ,, \; n - n^{(1)} = 1 : \; c_p\, c^{(1)}_p \left(\frac{-1,-1}{p}\right)\left(\frac{d^{(1)}, dd^{(1)}}{p}\right) \equiv \left(\frac{-dd^{(1)}, -1}{p}\right).$$

Da nun die Invarianten von C und $C^{(1)}$ für sich den Bedingungen (37.), (37a.), (37b.) von H II genügen, folgt, daß die Bedingungen (13.)—(15.) von selbst erfüllt sind. Denn es ist nach H II, (37.):

$$d_{p_\infty}\, d^{(1)}_{p_\infty} = (-1)^{J + J^{(1)}} = (-1)^{J - J^{(1)}} \, ,$$

ferner

$$c_{p_\infty}\, c^{(1)}_{p_\infty} \left(\frac{-1,-1}{p_\infty}\right)\left(\frac{d^{(1)}, dd^{(1)}}{p_\infty}\right) = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2} + \frac{J^{(1)}(J^{(1)}+1)}{2} + 1 + J^{(1)}(J + J^{(1)})} \, ,$$

und dies ist, wie man leicht bestätigt, gleich $(-1)^{\frac{(J-J^{(1)})\,(J-J^{(1)}+1)}{2}+1}$, schließlich

$$\prod_p c_p\, c^{(1)}_p \left(\frac{-1,-1}{p}\right)\left(\frac{d^{(1)}, dd^{(1)}}{p}\right) = \prod_p c_p \cdot \prod_p c^{(1)}_p = +1.$$

Ich trenne die weitere Diskussion der noch übrigen Bedingungen (11.), (12.), (16.), (17.) nach den verschiedenen, nach (11.) möglichen Werten von $n - n^{(1)}$.

1.) $n - n^{(1)} \geqq 3.$

Dann bleibt die einzige Bedingung (12.).

2.) $n - n^{(1)} = 2.$

Dann bleiben die Bedingungen:

$$(18.) \qquad 0 \leqq J - J^{(1)} \leqq 2$$

und (16.), die sich auch so schreiben läßt:

$$(19.) \qquad c^{(1)}_p = c_p \left(\frac{d, -1}{p}\right) \text{ für } \left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right).$$

Ist speziell $n = 4$, also $n^{(1)} = 2$, so besteht außerdem nach H II, (37b.):

$$c_p^{(1)} = +1 \quad \text{für } \left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) = +1.$$

Damit ergibt sich aus (19.) als weitere Bedingung:

$$\left.\begin{array}{r} +1 = c_p\left(\frac{d, -1}{p}\right), \\ \text{d. h. } c_p = +1 \end{array}\right\} \text{ für } \left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) = +1,$$

oder

(20.) $$\left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) \neq +1 \quad \text{für } c_p \neq +1 \text{ und zugleich } \left(\frac{d}{p}\right) = +1.$$

Ist ferner speziell $n = 3$, also $n^{(1)} = 1$, so besteht außerdem nach H II, (37a.):

$$c_p^{(1)} \equiv \left(\frac{-d^{(1)}, -1}{p}\right).$$

Damit geht (19.) in die völlig gleichwertige Bedingung über:

$$\left.\begin{array}{r} \left(\frac{-d^{(1)}, -1}{p}\right) = c_p\left(\frac{d, -1}{p}\right), \\ \text{d. h.} \qquad c_p = +1 \end{array}\right\} \text{ für } \left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right)$$

oder

(21.) $$\left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) \neq \left(\frac{d}{p}\right) \text{ für } c_p \neq +1.$$

Nach H II, Satz 5, S. 219 ist in diesem Falle schon (21.) allein, ohne Hinzunahme von (18.) ausreichend. Man überzeugt sich auch leicht, daß (18.) eine Folge von (21.) für $p = p_\infty$ ist.

3.) $\underline{n - n^{(1)} = 1.}$

Dann bleiben die Bedingungen:

(22.) $$0 \leqq J - J^{(1)} \leqq 1$$

und (17.), die sich auch so schreiben läßt:

(23.) $$c_p^{(1)} \equiv c_p\left(\frac{d, -d^{(1)}}{p}\right).$$

Ist speziell $n = 3$, also $n^{(1)} = 2$, so besteht außerdem nach H II, (37b.):

$$c_p^{(1)} = +1 \quad \text{für } \left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) = +1.$$

Damit ergibt sich aus (23.) als weitere Bedingung:

$$c_p = +1 \quad \text{für } \left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) = +1$$

oder

(24.) $$\left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) \neq +1 \quad \text{für } c_p \neq +1.$$

Ist ferner speziell $n = 2$, also $n^{(1)} = 1$, so besteht außerdem nach H II, (37a.):

$$c_p^{(1)} \equiv \left(\frac{-d^{(1)}, -1}{p}\right).$$

Damit geht (23.) in die völlig gleichwertige Bedingung über:

$$\left(\frac{-d^{(1)}, -1}{p}\right) \equiv c_p \left(\frac{d, -d^{(1)}}{p}\right),$$

d. h.

$$\left(\frac{-d^{(1)}, -d}{p}\right) \equiv c_p. \tag{25.}$$

Wie oben ist die Bedingung (22.) wieder in den beiden letzten Spezialfällen überflüssig und wird auch leicht als Folge aus den übrigen Bedingungen (23.) und (24.) bzw. (25.) für $p = p_\infty$ erkannt.

4. $n - n^{(1)} = 0$.

Dann kann die Komplexgleichung (3.) nur die eine einzige Lösung $C^{(2)} = 0$ haben, d. h. es muß $C^{(1)} = C$ sein, also alle Invarianten übereinstimmen. Es liegt dann der in H II ausführlich behandelte Fall der Äquivalenz vor.

Zusammenfassend haben wir also folgendes Resultat:

Satz 2. *Durch einen Komplex $C\{n, d, J, (c_p)\}$ sind alle und nur die (von Null verschiedenen) Komplexe $C^{(1)}\{n^{(1)}, d^{(1)}, J^{(1)}, (c_p^{(1)})\}$ in $K(1)$ darstellbar, deren Invarianten den folgenden Bedingungen genügen:*

$$0 \leqq n - n^{(1)} \leqq n - 1. \tag{26.}$$

Außerdem für

1.) $n - n^{(1)} \geqq 3$:

$$0 \leqq J - J^{(1)} \leqq n - n^{(1)}. \tag{27.}$$

2.) $n - n^{(1)} = 2$:

a) *allgemein*

$$0 \leqq J - J^{(1)} \leqq 2, \tag{28.}$$

$$c_p^{(1)} = c_p \left(\frac{d, -1}{p}\right) \text{ für } \left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right). \tag{29.}$$

b) *speziell für* $n = 4;\ n^{(1)} = 2$

$$0 \leqq J - J^{(1)} \leqq 2, \tag{30.}$$

$$\left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) \neq +1 \text{ für } c_p \neq +1 \text{ und zugleich } \left(\frac{d}{p}\right) = +1, \tag{31.}$$

$$c_p^{(1)} = c_p \left(\frac{d, -1}{p}\right) \text{ für } \left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right). \tag{32.}$$

c) *speziell für* $n = 3;\ n^{(1)} = 1$

$$\left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) \neq \left(\frac{d}{p}\right) \text{ für } c_p \neq +1. \tag{33.}$$

3.) $n - n^{(1)} = 1$:

a) *allgemein*

$$0 \leqq J - J^{(1)} \leqq 1, \tag{34.}$$

$$c_p^{(1)} \equiv c_p \left(\frac{d, -d^{(1)}}{p}\right). \tag{35.}$$

b) *speziell für* $n = 3;\ n^{(1)} = 2$

$$\left(\frac{-d^{(1)}}{p}\right) \neq +1 \text{ für } c_p \neq +1, \tag{36.}$$

$$c_p^{(1)} \equiv c_p \left(\frac{d, -d^{(1)}}{p}\right). \tag{37.}$$

c) *speziell für* $n = 2;\ n^{(1)} = 1$ (38.) $\left(\frac{-d^{(1)}, -d}{p}\right) \equiv c_p$.

4. $n - n^{(1)} = 0$:

(39.) $d^{(1)} = d;\ J^{(1)} = J;\ c_p^{(1)} = c_p$.

§ 2. Diskussion der Darstellbarkeitskriterien.

Die soeben erhaltenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit eines Komplexes $C^{(1)}\{n^{(1)}, d^{(1)}, J^{(1)}, (c_p^{(1)})\}$ durch einen Komplex $C\{n, d, J, (c_p)\}$ führen zu einigen bemerkenswerten Sätzen, die ich im folgenden aufstellen will. Ich sehe dabei zunächst, wie schon bei der Formulierung der Kriterien in Satz 2, den darstellenden Komplex C als fest gegeben an und charakterisiere die Mannigfaltigkeit der durch ihn darstellbaren Komplexe $C^{(1)}$. Dabei bezeichne ich die für die Kriterien maßgebende Differenz $n - n^{(1)}$ kurz als „*Defekt*" der betr. Darstellung.

Zunächst bedeutet die in allen Fällen notwendige Bedingung:

$$0 \leqq J - J^{(1)} \leqq n - n^{(1)}, \text{ d. h.}$$

$$\begin{cases} J^{(1)} \leqq J, \\ n - J^{(1)} \leqq n - J \end{cases}$$

offenbar:

Satz 3. *Eine reine* [1]) *Form (Diagonalmatrix) des darzustellenden Komplexes* $C^{(1)}$ *darf nicht mehr positive und nicht mehr negative Glieder haben, als eine reine Form des darstellenden Komplexes* C.

Dies ist ersichtlich nur die allgemeinste Formulierung des *Sylvester*schen Trägheitsgesetzes für quadratische Formen. Für Darstellungen eines Defektes $\geqq 3$ ist diese Bedingung auch schon hinreichend, sodaß man also die Invarianten $d^{(1)}$, $c_p^{(1)}$ des darzustellenden Komplexes $C^{(1)}$ beliebig vorschreiben kann [2]).

Satz 4. *Bei Darstellungen eines Defektes* $\geqq 3$ *können die Invarianten* $d^{(1)}$, $c_p^{(1)}$ *(bis auf eine ev. Beschränkung für* p_∞*) beliebig vorgeschrieben werden.*

Ein größeres Interesse als dieser allgemeine Fall, in dem nur die triviale „Trägheitsbedingung" auftritt, beanspruchen die Spezialfälle 2.), 3.) von Satz 2, wo es sich um Darstellungen der Defekte 2 und 1 handelt. Hier folgt zunächst ganz allgemein für die Invarianten $d^{(1)}$ der darzustellenden $C^{(1)}$:

Satz 5. *Bei Darstellungen vom Defekt 2 oder 1 kann für ternäre und höhere darzustellende Komplexe* $C^{(1)}$ *wenigstens deren Invariante* $d^{(1)}$ *beliebig vorgeschrieben werden* [2]), *für binäre und unäre Komplexe* $C^{(1)}$ *ist jedoch* $d^{(1)}$ *bzw. an die Bedingungen* (31.), (33.), (36.), (38.) *gebunden, d. h. muß in gewissen, durch d und* (c_p) *bestimmten arithmetischen Reihen enthalten sein.*

---

[1]) Siehe H I, S. 132.

[2]) Bis auf eine eventuelle Beschränkung für $d_{p_\infty}^{(1)}$, $c_{p_\infty}^{(1)}$, die sich aus (27.) und den Relationen zwischen $J^{(1)}$ und diesen Invarianten (H II, S. 220, (37.)) ergibt.

Weiter ergibt sich für die Invarianten $c_p^{(1)}$ der darzustellenden $C^{(1)}$:

Für den Defekt 2 ist das System $(c_p^{(1)})$ für gewisse (unendlich viele) von d, aber auch von $d^{(1)}$ abhängige p festgelegt (Gl. (29.), (32.)), für die übrigen Stellen keiner Beschränkung unterworfen. Außer im Falle $-d^{(1)} = d$ sind die letzteren in unendlicher Anzahl vorhanden.

Satz 6. *Von allen Komplexen $C^{(1)}\{n-2, d^{(1)}, J^{(1)}\}$ mit bestimmten (nach den vorhergehenden Sätzen überhaupt in Frage kommenden) Invarianten $d^{(1)}$, $J^{(1)}$ ist nur ein bestimmter, von $d^{(1)}$ abhängiger Teil durch $C\{n, d, J, (c_p)\}$ darstellbar, der für $-d^{(1)} \neq d$ aus unendlich vielen, für $-d^{(1)} = d$ aus nur einem einzigen Komplex besteht.*

Für den Defekt 1 ist nach (35.), (37.) das System $(c_p^{(1)})$ und wegen (34.), d. h.

$$J - 1 \leqq J^{(1)} \leqq J$$

und

$$d_{p_\infty}^{(1)} = (-1)^{J^{(1)}}$$

auch $J^{(1)}$ durch die Invarianten $d^{(1)}$ und d, J, (c_p) vollständig festgelegt.

Satz 7. *Von allen Komplexen $C^{(1)}\{n-1, d^{(1)}\}$ mit einer bestimmten (nach Satz 5 überhaupt in Frage kommenden) Invariante $d^{(1)}$ ist immer nur ein einziger durch $C\{n, d, J, (c_p)\}$ darstellbar.*

Ganz entsprechende Sätze gelten auch, wenn man einen festen Komplex $C^{(1)}\{n^{(1)}, d^{(1)}, J^{(1)}, (c_p^{(1)})\}$ zugrunde legt, und die Gesamtheit aller ihn darstellenden Komplexe $C\{n, d, J, (c_p)\}$ betrachtet. Ich beschränke mich hier auf den interessantesten Fall des Defektes 1, (der andere nicht triviale Fall des Defektes 2 führt zu weniger bemerkenswerten Resultaten).

Zu diesem Zweck schreibe ich die Bedingungen (34.)—(38.) in folgender Form, die den Komplex C als zu bestimmenden bevorzugt:

a) allgemein
$$\begin{cases} (34\text{ a.}) & J^{(1)} \leqq J \leqq J^{(1)} + 1, \\ (35\text{ a.}) & c_p \equiv c_p^{(1)} \left(\dfrac{d, -d^{(1)}}{p}\right). \end{cases}$$

b) speziell für $n = 2$; $n^{(1)} = 1$ (38 a.) $c_p \equiv \left(\dfrac{-d, -d^{(1)}}{p}\right)$.

Eine besondere Führung des Spezialfalles $n = 3$; $n^{(1)} = 2$, wie in Satz 2, ist hier überflüssig, denn die Zusatzbedingung (36.) in der Form: $c_p = +1$ für $\left(\dfrac{-d^{(1)}}{p}\right) = +1$ ist bei gegebenem $C^{(1)}$ wegen der für jeden binären Komplex bestehenden Relation: $c_p^{(1)} = +1$ für $\left(\dfrac{-d^{(1)}}{p}\right) = +1$ eine Folge von (35 a.).

Aus (34a.), (35a.), (38a.) folgt unmittelbar, daß d ganz beliebig vorgeschrieben werden kann. Dadurch ist dann aber wegen (34a.) und $d_{p_\infty} = (-1)^J$ die Invariante J und wegen (35a.) bzw. (38a.) das Invariantensystem (c_p) eindeutig festgelegt. Also folgt als Gegenstück zu Satz 7:

Satz 8. *Von allen Komplexen $C\{n, d\}$ mit (frei wählbarem) bestimmten d, stellt nur ein einziger einen gegebenen Komplex $C^{(1)}\{n-1, d^{(1)}, J^{(1)}, (c_p^{(1)})\}$ dar.*

Denkt man sich also bei festem n, d für jedes beliebige J, (c_p) das System aller durch den Komplex $C\{n, d, J, (c_p)\}$ darstellbaren $(n-1)$-ären Komplexe $C^{(1)}$ aufgestellt, so werden die so entstehenden Systeme so beschaffen sein, daß keine zwei unter ihnen einen Komplex $C^{(1)}$ gemeinsam haben. Darüber hinaus gilt weiter:

Satz 9. *Sind $C_1\{n, d_1, J_1, (c_p)_1\}$ und $C_2\{n, d_2, J_2, (c_p)_2\}$ irgendzwei verschiedene n-äre Komplexe, so sind die ihnen beiden zugeordneten Systeme aller durch sie darstellbaren $(n-1)$-ären Komplexe nicht identisch. Demnach ist also ein n-ärer Komplex durch Angabe des Systems aller durch ihn darstellbaren $(n-1)$-ären Komplexe eindeutig bestimmt.*

Beweis: Ist $d_1 = d_2$, also $\{J_1, (c_p)_1\}$ nicht mit $\{J_2, (c_p)_2\}$ identisch, so sind, wie eben gezeigt, die beiden Systeme darstellbarer $(n-1)$-ärer Komplexe sogar vollständig verschieden. Sei also jetzt $d_1 \neq d_2$. Angenommen, jene beiden Systeme $(n-1)$-ärer Komplexe:

$$C_{1k}^{(1)}\{n-1, d_{1k}^{(1)}, J_{1k}^{(1)}, (c_p^{(1)})_{1k}\} \text{ und } C_{2k}^{(1)}\{n-1, d_{2k}^{(1)}, J_{2k}^{(1)}, (c_p^{(1)})_{2k}\};\ (k = 1, 2, \ldots)$$

wären identisch. Dann wäre zunächst die Gesamtheit der $d_{1k}^{(1)}$ identisch mit der Gesamtheit der $d_{2k}^{(1)}$.

Für $n = 2$ wäre also nach Satz 2, (38.) die Gesamtheit aller den beiden Bedingungen

$$\text{(40a.)}\ \left(\frac{-d_{1k}^{(1)}, -d_1}{p}\right) \equiv (c_p)_1 \text{ und (40b.)} \left(\frac{-d_{2k}^{(1)}, -d_2}{p}\right) \equiv (c_p)_2$$

genügenden $d_{1k}^{(1)}$ und $d_{2k}^{(1)}$ identisch. Nun ist wegen $d_1 \neq d_2$ sicher für unendlich viele $p = q$:

$$\left(\frac{d_1}{q}\right) \neq \left(\frac{d_2}{q}\right).$$

Wählt man daher irgendeins dieser q, für das außerdem

$$(c_q)_1 = (c_q)_2$$

ist, (was wegen $\prod_p c_p = +1$ stets möglich), so wären für dies q die (40a.) und (40b.) lösenden q-adischen Zahlklassen [1]) nicht identisch [2]), sodaß es ein rationales $d^{(1)}$ gäbe, das etwa Lösung von (40a.), nicht aber von (40b.) wäre, im Widerspruch zu der gemachten Annahme.

Für $n \geqq 3$ wäre ferner entweder schon die Gesamtheit der $d_{1k}^{(1)}$ von der Gesamtheit der $d_{2k}^{(1)}$ verschieden, sonst aber jedenfalls für alle in Frage kommenden $d_k^{(1)} = d_{1k}^{(1)} = d_{2k}^{(1)}$ nach (35.) und (37.):

$$(c_p^{(1)})_{1k} \equiv (c_p)_1 \left(\frac{d_1, -d_k^{(1)}}{p}\right) \equiv (c_p^{(1)})_{2k} \equiv (c_p)_2 \left(\frac{d_2, -d_k^{(1)}}{p}\right);\quad (k = 1, 2, \ldots),$$

d. h. für jedes in Frage kommende $d_k^{(1)}$:

$$\text{(41.)} \qquad \left(\frac{d_1 d_2, -d_k^{(1)}}{p}\right) \equiv (c_p)_1 (c_p)_2 .$$

Wählt man dann wieder ein (stets existierendes) ungerades $p = q$ so, daß

---

[1]) H. I, S. 131.

[2]) *Hensel*, Zahlentheorie, Leipzig 1913, S. 328, (8.).

(42.) $$\left(\frac{d_1 d_2}{q}\right) \neq +1$$

und zudem

$$(c_q)_1 = (c_q)_2 = +1$$

ist, so ist nach Satz 2, 3.) a) und b), (speziell Gl. (36.)), der Wert aller in Frage kommenden $d_k^{(1)}$ für den Bereich dieses q vollständig frei, sodaß sicher Werte $d_k^{(1)}$ aller q-adischen Zahlklassen vorkommen. Wegen (42.) bestände dann aber (41.) nur für die einer Hälfte dieser q-adischen Zahlklassen angehörigen $d_k^{(1)}$, während (41.) für die der anderen Hälfte angehörigen $d_k^{(1)}$ nicht erfüllt wäre [1]), was wiederum auf einen Widerspruch führt. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Ganz entsprechend läßt sich aus Satz 7 herleiten:

Satz 10. *Ein $(n-1)$-ärer Komplex ist durch Angabe des Systems aller ihn darstellenden n-ären Komplexe eindeutig bestimmt.*

Ich übergehe den ganz analogen, einfachen Beweis, der sich auf die Kriterien (35a.), (38a.) stützt.

Durch die in Satz 9 und 10 ausgesprochene charakteristische Eigenschaft sind, wie man sich leicht überzeugt, die Darstellungen vom Defekt 1 vor denen höherer Defekte ausgezeichnet.

Entsprechend der zunehmenden Unbestimmtheit des diophantischen Problems nimmt mit wachsendem Defekt die Mannigfaltigkeit der durch einen bestimmten Komplex C darstellbaren Komplexe $C^{(1)}$ zu, und zwar in folgender Weise:

Mit dem Defekt 0 ist nur der Komplex C selbst durch C darstellbar, mit dem Defekt 1 zu jeder der (unendlich vielen) möglichen Invarianten $d^{(1)}$ ein einziger Komplex (Satz 7), mit dem Defekt 2 zu jeder der (unendlich vielen) möglichen Invarianten $d^{(1)}$ eine an gewisse Beschränkungen gebundene unendliche [2]) Anzahl von $C^{(1)}$ (Satz 6), mit einem Defekt $\geqq 3$ schließlich bis auf eine Beschränkung für $J^{(1)}$ alle Komplexe $C^{(1)}$ (Satz 3, 4).

Ganz entsprechendes gilt auch für das Zunehmen der Mannigfaltigkeit der einen bestimmten Komplex $C^{(1)}$ darstellenden Komplexe C mit wachsendem Defekt.

Es mag noch bemerkt werden, daß für $n^{(1)} = 1$ entsprechend dem in der Einleitung gesagten die Darstellbarkeitskriterien von Satz 2 in die Kriterien für die Darstellbarkeit von rationalen Zahlen durch quadratische Formen übergehen, wie ich sie in H I, S. 147, Tab. 1) zusammengestellt habe. Man bestätigt leicht die Identität der dort aufgestellten Kriterien mit den für $n^{(1)} = 1$ aus Satz 2 folgenden. ($d^{(1)}$ entspricht dabei dem dortigen m, für (c_p) gelten die Beziehungen H II, S. 216, (20.), (21.), (22.).)

Die in Satz 2 zusammengestellten Darstellbarkeitskriterien für den Körper $K(1)$ zerfallen in jedem Falle in eine unendliche Anzahl von Einzelbedingungen für

---

[1]) Siehe Anm. 2 auf voriger Seite.

[2]) Bis auf den in Satz 6 genannten Ausnahmefall — $d^{(1)} = d$.

jede einzelne Stelle p, von denen wegen des Produktsatzes für das *Hilbert*sche Symbol und die Invarianten c_p nur eine endliche Anzahl wirkliche Bedingungen sind, während die unendlich vielen übrigen identisch erfüllt sind. Die Bedingungen für die Invariante J sind dabei der Stelle p_∞ zuzuordnen. Es bedarf wohl keiner besonderen Begründung, wenn ich bemerke, daß für die Darstellbarkeit in einem *Hensel*schen Körper $K(p)$ jedesmal die auf das betreffende p bezüglichen Bedingungen für sich allein notwendig und hinreichend sind. Sind diese für ein p identisch erfüllt, so bestehen in diesem $K(p)$ keine Darstellbarkeitsbeschränkungen, während es sonst in diesem $K(p)$ sowohl darstellbare als auch nicht darstellbare Komplexe gibt. Dann, und nur dann, wenn die Darstellbarkeitsbedingungen für jeden $K(p)$ erfüllt sind, besteht die Darstellbarkeit in $K(1)$, sodaß auch hier wieder das bemerkenswerte Prinzip gilt [1]):

Satz 11. *Für das Bestehen einer Darstellbarkeitsbeziehung zwischen zwei Komplexen in $K(1)$ ist das Bestehen einer solchen in jedem $K(p)$ notwendig und hinreichend.*

Auch in den folgenden Ausführungen läßt sich jedesmal ein entsprechendes Prinzip aussprechen.

§ 3. Darstellbarkeit der Null durch einen Komplex.

Ich untersuche jetzt die Möglichkeit der in der Einleitung, Gl. (2.), genannten Matrizengleichung:

$$S' \mathfrak{A} S = 0, \tag{43.}$$

wo $\mathfrak{A}$ eine gegebene (symmetrische) Matrix (quadratische Form) und S eine nicht identisch verschwindende (rechteckige) Matrix (Substitution) ist, die offenbar ohne Beschränkung von einem Typus $N \cdot \mu$ angenommen werden kann, wo $N \cdot N$ der Typus von $\mathfrak{A}$ ist. Die Möglichkeit von (43.) hängt nur von dem Komplex C ab, dem $\mathfrak{A}$ angehört; denn geht $\mathfrak{A}$ durch die umkehrbare Substitution P in $\overline{\mathfrak{A}}$ über:

$$P' \mathfrak{A} P = \overline{\mathfrak{A}},$$

so folgt aus (43.):

$$(P^{-1} S)' \overline{\mathfrak{A}} (P^{-1} S) = \overline{S}' \overline{\mathfrak{A}} \overline{S} = 0. \tag{44.}$$

Ist hierbei $\mathfrak{A}$ eine Matrix von einem höheren Typus $N \cdot N$, als ihr Rang n angibt, $\overline{\mathfrak{A}}$ dagegen vom Typus $n \cdot n$, so kann es sehr wohl vorkommen, daß $\overline{S} = P^{-1} S$ zwar als Substitution vom Typus $N \cdot \mu$ nicht identisch verschwindet, jedoch nach Auslassung der bei der Komposition $\overline{S}' \overline{\mathfrak{A}} \overline{S}$ gar nicht in Frage kommenden $N - n$ letzten Zeilen identisch verschwindet. Eine Gleichung (43.) ist daher dann und nur dann als „nicht identisch" anzusehen, wenn nach Transformation auf die Normalform (44.) mit einem $\overline{\mathfrak{A}}$ vom Typus $n \cdot n$ und $\overline{S}$ vom Typus $n \cdot \mu$ dies $\overline{S}$ nicht identisch verschwindet. Ich setze demgemäß von vornherein (43.) in dieser Normalform voraus. Jede weitere Trausformation von $\mathfrak{A}$ mittels umkehrbarer Substitutionen P

---

[1]) Siehe H I, S. 130, Satz (II); H II, S. 208, Satz (II). Diese beiden Sätze sind nach dem in der Einleitung gesagten Spezialfälle des Satzes 11.

vom Typus $n \cdot n$ führt dann, wie die obigen Gleichungen lehren, zu ebenfalls nicht identischen Darstellungen der Null, und hierbei bleibt sogar der Rang ν ($\geqq 1$) der darstellenden Substitutionen S invariant. Somit rechtfertigt sich folgende Definition:

Definition. *Die Null heißt durch einen n-ären Komplex C ν-är darstellbar* ($\nu \geqq 1$), *wenn für irgendeine Form $\mathfrak{A}$ vom Typus $n \cdot n$ aus C eine Gleichung* (43.) *mit einem S von einem Typus $n \cdot \mu$ und Rang ν besteht.*

Durch hintere Komposition mit einer Matrix $R_\varkappa$ ($\varkappa \leqq \mu$), die an $\varkappa$ geeigneten Stellen Einsen, sonst nur Nullen hat, kann man dann offenbar S in eine Matrix $SR_\varkappa = \overline{S}$ transformieren, in der von den μ Spalten von S genau $\mu - \varkappa$ beliebig vorgeschriebene fortgefallen sind, und für $\overline{S}$ besteht dann ebenfalls die Gleichung $\overline{S}' \mathfrak{A} \overline{S} = 0$. Da man auf diese Weise aus S Matrizen $\overline{S}$ jedes vorgeschriebenen Ranges $\nu_1 \leqq \nu$ und speziell eine solche vom Typus $n \cdot \nu$ und Rang ν herstellen kann, ergibt sich:

Satz 12. *Die ν-äre Darstellbarkeit der Null zieht die ν_1-äre für jedes $\nu_1 \leqq \nu$ nach sich.*

Satz 13. *In* (43.) *darf S vom Typus $n \cdot \nu$ angenommen werden, wo ν der Rang von S ist,* ($1 \leqq \nu \leqq n$).

Speziell für $\nu = 1$ liefert (43.) nach Satz 13 ersichtlich eine nicht identische Darstellung der Null durch die quadratische Form $\mathfrak{A}$ im Sinne von H I. Die soeben definierten ν-ären Darstellungen der Null erweisen sich also in ebendemselben Sinne als Verallgemeinerung der gewöhnlichen, wie die in §§ 1, 2 behandelten Darstellungen niederer Formen durch höhere gegenüber der Darstellung von Zahlen.

Ich wende mich jetzt zur Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein gegebener Komplex C die Null ν-är darstellt. Diese Bedingungen müssen sich vollständig durch die Invarianten $n, d, J, (c_p)$ von C ausdrücken lassen.

Zunächst muß

$$1 \leqq \nu \leqq n - 1 \tag{45.}$$

sein. Denn bestände (43.) für ein $\nu \geqq n$, so bestände dieselbe Gleichung nach Satz 12 und 13 auch mit einer Matrix P vom Typus $n \cdot n$ und Rang n. Das ist aber unmöglich, da dann der Rang von $P' \mathfrak{A} P$ genau gleich n ist.

Ich bezeichne im folgenden mit $C_{2\nu}$ den eindeutig bestimmten Komplex, dem die Form

$$\begin{pmatrix} E_\nu & 0 \\ 0 & -E_\nu \end{pmatrix}$$

angehört. Dann gilt:

Satz 14. *Die Null ist durch einen Komplex C dann und nur dann ν-är darstellbar, wenn die Komplexgleichung*

$$C = C_{2\nu} + C^{(1)} \tag{46.}$$

eine Lösung $C^{(1)}$ hat.

Beweis: a) Hat (46.) eine Lösung $C^{(1)}$, so muß $C^{(1)}$ die Invariante $n^{(1)} = n - 2\nu$ haben. Ist dann $\mathfrak{A}^{(1)}$ eine Form aus $C^{(1)}$, so ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} E_\nu & 0 & 0 \\ 0 & -E_\nu & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}^{(1)} \end{pmatrix}$$

eine Form aus C, die durch die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} E_\nu \\ E_\nu \\ 0 \end{pmatrix}$$

vom Range ν in

$$S'\,\mathfrak{A}\,S = (E_\nu\, E_\nu\, 0) \begin{pmatrix} E_\nu & 0 & 0 \\ 0 & -E_\nu & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\nu \\ E_\nu \\ 0 \end{pmatrix} = (E_\nu - E_\nu) = 0$$

übergeht, also die Null ν-är darstellt.

b) Ist umgekehrt die Null ν-är durch C darstellbar und

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

eine reine Form aus C, so besteht eine Gleichung:

$S'\,\mathfrak{A}\,S = 0$; (S vom Typus $n \cdot \nu$ und Rang ν und nach (45.) $1 \leqq \nu \leqq n-1$).

Ich darf dann ohne Beschränkung (Vertauschungssubstitutionen!) annehmen, daß die erste ν-reihige Determinante $|S_1|$ der Matrix S nicht verschwindet, und setze dementsprechend

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$

und ferner entsprechend

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^{(2)} \end{pmatrix}; \quad (\mathfrak{A}^{(1)} \text{ vom Typus } \nu \cdot \nu). \tag{47.}$$

Dann wird

$$S'\,\mathfrak{A}\,S = (S_1'\ \ S_2') \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = S_1'\,\mathfrak{A}^{(1)}\,S_1 + S_2'\,\mathfrak{A}^{(2)}\,S_2 = 0,$$

also

$$S_2'\,\mathfrak{A}^{(2)}\,S_2 = -\,S_1'\,\mathfrak{A}^{(1)}\,S_1 = -\,\overline{\mathfrak{A}}^{(1)}, \tag{48.}$$

wo $\overline{\mathfrak{A}}^{(1)} = S_1'\,\mathfrak{A}^{(1)}\,S_1$ nach der Annahme über S_1 eine zu $\mathfrak{A}^{(1)}$ äquivalente Form vom Range ν ist. Aus (48.) folgt, daß $-\,\overline{\mathfrak{A}}^{(1)}$ durch die Form $\mathfrak{A}^{(2)}$ vom Range $n-\nu$ darstellbar ist; daher existiert nach Satz 1 (S. 15) eine Form $\mathfrak{C}^{(1)}$ vom Range $(n-\nu)-\nu = n-2\nu = n^{(1)} \geqq 0$, sodaß die Form

$$\overline{\mathfrak{A}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\,\overline{\mathfrak{A}}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}^{(1)} \end{pmatrix}$$

zu $\mathfrak{A}^{(2)}$ äquivalent ist. Dann ist nach (47.), (48.)

$$\overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}^{(1)} & 0 \\ 0 & \overline{\mathfrak{A}}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{\mathfrak{A}}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{C}^{(1)} \end{pmatrix}$$

zu $\mathfrak{A}$ äquivalent. Der Teil

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}}^{(1)} & 0 \\ 0 & -\overline{\mathfrak{A}}^{(1)} \end{pmatrix}$$

von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist ferner äquivalent einer reinen Form

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\bar{a}_\nu \end{pmatrix},$$

und da jede Form $\begin{pmatrix} \bar{a}_i & 0 \\ 0 & -\bar{a}_i \end{pmatrix}$ bekanntlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ äquivalent ist (H II, Satz 4, S. 218), weiter der reinen Form

$$\begin{pmatrix} E_\nu & 0 \\ 0 & -E_\nu \end{pmatrix},$$

sodaß schließlich

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \begin{pmatrix} E_\nu & 0 & 0 \\ 0 & -E_\nu & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{C}^{(1)} \end{pmatrix}$$

eine zu $\overline{\mathfrak{A}}$ und somit zu $\mathfrak{A}$ äquivalente Form ist. Bezeichnet also $C^{(1)}$ den Komplex von $\mathfrak{C}^{(1)}$, so ist

$$C = C_{2\nu} + C^{(1)}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nach Satz 1 (S. 15) ist also die Null dann und nur dann ν-är durch C darstellbar, wenn der Komplex $C_{2\nu}$ durch C darstellbar ist. Die Invarianten von $C_{2\nu}$ sind, wie man leicht bestätigt:

$$\bar{n} = 2\nu \;; \bar{d} = (-1)^\nu; \; \bar{J} = \nu; \; \bar{c}_p \equiv \varepsilon_p^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}+1},$$

wenn von jetzt an das Symbol $\left(\frac{-1,-1}{p}\right)$, das für ungerades p gleich $+1$, für $p = 2$ und p_∞ gleich -1 ist, zur Abkürzung mit ε_p bezeichnet wird.

Damit ergeben sich aus Satz 2 (S. 19) ohne weiteres folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die ν-äre Darstellbarkeit der Null durch $C\,\{n, d, J, (c_p)\}$:

$$\nu \leqq \frac{n}{2}$$

und für

$$1.)\; n - 2\nu \geqq 3, \text{ d. h. } \nu \leqq \frac{n-3}{2}:$$

$$0 \leqq J - \nu \leqq n - 2\nu,$$

d. h.

$$\nu \leqq J \leqq n - \nu.$$

2.) $n - 2\nu = 2$, d. h. n gerade und $\nu = \frac{n}{2} - 1$:

$$\frac{n}{2} - 1 \leqq J \leqq \frac{n}{2} + 1$$

und

$$\varepsilon_p^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}+1} = c_p \left(\frac{d, -1}{p}\right) \text{ für } \left(\frac{(-1)^{\nu+1}}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right),$$

d. h.

$$c_p = \varepsilon_p^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}+1}\, \varepsilon_p^{\nu+1} = \varepsilon_p^{\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}+1} \text{ für } \left(\frac{(-1)^{\nu+1} d}{p}\right) = +1$$

oder

$$c_p = \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1} \text{ für } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} d}{p}\right) = +1.$$

3.) $n - 2\nu = 1$, d. h. n ungerade und $\nu = \frac{n-1}{2}$:

$$\frac{n-1}{2} \leqq J \leqq \frac{n+1}{2}$$

und

$$\varepsilon_p^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}+1} \equiv c_p \left(\frac{d, (-1)^{\nu+1}}{p}\right),$$

d. h.

$$c_p \left(\frac{d, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p}\right) \equiv \varepsilon_p^{\frac{n^2-1}{8}+1} \quad [1]).$$

4.) $n - 2\nu = 0$, d. h. n gerade und $\nu = \frac{n}{2}$:

$$d = (-1)^{\frac{n}{2}}; \quad J = \frac{n}{2}; \quad c_p \equiv \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1}.$$

Zusammenfassend haben wir also folgendes Resultat:

Satz 15. *Die Null ist durch alle und nur die Komplexe* $C\{n, d, J, (c_p)\}$ ν-*är darstellbar, deren Invarianten den folgenden Bedingungen genügen:*

$$\nu \leqq \frac{n}{2}$$

und für

1.) $n - 2\nu \geqq 3$, *d. h.* $\nu \leqq \frac{n-3}{2}$:

$$\nu \leqq J \leqq n - \nu.$$

2.) $n - 2\nu = 2$, *d. h. n gerade und* $\nu = \frac{n}{2} - 1$:

[1]) Die in den Spezialfällen $n = 4, 3, 2$ in Satz 2 hinzutretenden besonderen Bedingungen liefern hier, wie man sich leicht überzeugt, keine weiteren Bedingungen, als die für den allgemeinen Fall im Text aufgestellten.

$$\begin{cases} \dfrac{n}{2} - 1 \leqq J \leqq \dfrac{n}{2} + 1, \\ c_p = \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1} \text{ für } \left(\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}} d}{p}\right) = +1. \end{cases}$$

3.) $n - 2\nu = 1$, *d. h. n ungerade und* $\nu = \dfrac{n-1}{2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{n-1}{2} \leqq J \leqq \dfrac{n+1}{2}, \\ c_p \left(\dfrac{d, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p}\right) \equiv \varepsilon_p^{\frac{n^2-1}{8}+1}. \end{cases}$$

4.) $n - 2\nu = 0$, *d. h. n gerade und* $\nu = \dfrac{n}{2}$:

$$J = \frac{n}{2}\ ;\ d = (-1)^{\frac{n}{2}}\ ;\ c_p \equiv \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß für $\nu = 1$ diese Kriterien in genauer Übereinstimmung mit den in H I, S. 147, Tab. 2) zusammengestellten Kriterien für die gewöhnliche Darstellbarkeit der Null durch die Formen aus C sind, wie es nach der Bemerkung zu Beginn dieses § sein muß. Für $n \neq 4$ ist die Übereinstimmung unter Berücksichtigung von H II, Satz 5, S. 219 wörtlich. Für $n = 4$ resultieren hier aus 2.) die beiden Bedingungen:

$$1 \leqq J \leqq 3,$$

$$c_p = +1 \text{ für } \left(\frac{d}{p}\right) = +1,$$

deren erste zunächst überflüssig ist, da für $J = 0$ oder 4 folgt:

$$d_p = (-1)^J = +1;\ c_{p\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1} = -1,$$

was mit der zweiten unverträglich ist. Da ferner für eine den Kriterien in H I zugrundegelegte besondere Form

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1^2 + \varphi(x_2, x_3, x_4)$$

$$c_p(f) \equiv \left(\frac{a_1, a_1}{p}\right)\left(\frac{a_1, d(\varphi)}{p}\right(c_p(\varphi) \equiv \left(\frac{a_1, d(f)}{p}\right) c_p(\varphi) \equiv \left(\frac{a_1, d}{p}\right) \hat{c}_p(\varphi)\ ^{1})$$

ist, ist die Bedingung aus H I, S. 147, Tab. 2), nämlich

$$\hat{c}_p(\varphi) = +1 \text{ für } \left(\frac{d}{p}\right) = +1$$

identisch mit der hier gewonnenen.

Schließlich sei noch bemerkt, daß auch hier die in Satz 15 aufgestellten Darstellbarkeitskriterien für $K(1)$ sich aus den Kriterien für die einzelnen $K(p)$ zusammensetzen, sodaß wieder das Prinzip gilt:

---

[1]) Siehe H I, S. 135 oben; H II, S. 219, (22.).

Satz 16. *Ein Komplex stellt die Null dann und nur dann v-är in $K(1)$ dar, wenn er sie in allen $K(p)$ v-är darstellt.*

§ 4. Multiplikative Äquivalenz der Komplexe.

Ich untersuche in diesem Paragraphen, wann eine quadratische Form $\mathfrak{A}$ einem rationalen (von Null verschiedenen) Multiplum einer anderen Form $\mathfrak{A}^{(1)}$ äquivalent ist. Ist dies der Fall, besteht also eine Gleichung

(49.) $S'\,\mathfrak{A}\,S = t\,\mathfrak{A}^{(1)}$ [1]); (t rational $\neq 0$; S umkehrbare Substitution),

so nenne ich $\mathfrak{A}^{(1)}$ „*multiplikativ-äquivalent*" zu $\mathfrak{A}$ in $K(1)$. Die so definierte multiplikative Äquivalenz ist ersichtlich kommutativ und transitiv. Die Möglichkeit einer Gleichung (49.) hängt ferner, wie leicht zu sehen, nur von den Komplexen C und $C^{(1)}$ ab, denen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^{(1)}$ angehören, sodaß man von einer multiplikativen Äquivalenz der Komplexe reden kann, die so zu verstehen ist, daß jede Form aus C zu jeder aus $C^{(1)}$ multiplikativ-äquivalent ist.

Die Bedingungen, die hierfür zwischen den Invarianten $n, d, J, (c_p)$ und $n^{(1)}, d^{(1)}, J^{(1)}, (c_p^{(1)})$ von C und $C^{(1)}$ bestehen müssen, folgen leicht aus den Ergebnissen von H II. Nach dem dortigen Satz 4, S. 218 ist für die multiplikative Äquivalenz von C und $C^{(1)}$ notwendig und hinreichend, daß sich ein rationales $t \neq 0$ finden läßt, sodaß die Invariantensysteme von tC und $C^{(1)}$ übereinstimmen.

Für die Invarianten $\bar{n}, \bar{d}, \bar{J}, (\bar{c}_p)$ von tC ergibt sich nun sofort durch Betrachtung einer reinen Form aus C:

$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ und ihres Multiplums $\begin{pmatrix} ta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & ta_n \end{pmatrix}$ aus tC:

$$\bar{n} = n;\ \bar{d} = \text{Kern von } t^n d;\ \bar{J} = \begin{cases} J & \text{für } t > 0 \\ n - J & ,, \quad t < 0 \end{cases};$$

$$\bar{c}_p \equiv \left(\frac{-1,-1}{p}\right)^{\prod_{\substack{i,k=1 \\ i \leqq k}}^{n}} \left(\frac{ta_i, ta_k}{p}\right) \equiv c_p \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{t, a_i}{p}\right)\left(\frac{t, a_k}{p}\right)\left(\frac{t, t}{p}\right)$$

$$\equiv c_p \left(\frac{t, t}{p}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{t, a_1 \ldots a_k}{p}\right)\left(\frac{t, a_k}{p}\right)^k$$

$$\equiv c_p \left(\frac{t, (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{p}\right)\left(\frac{t, a_1^n a_2^{n-1} \ldots a_n}{p}\right)\left(\frac{t, a_1 a_2^2 \ldots a_n^n}{p}\right) \equiv c_p \left(\frac{t, (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{p}\right)\left(\frac{t, d^{n+1}}{p}\right).$$

Für die multiplikative Äquivalenz von C und $C^{(1)}$ ist demnach notwendig und hinreichend, daß

$$n^{(1)} = n,$$
$$J^{(1)} = J \text{ oder } n - J,$$

d. h.

(50.) $$|n - 2J| = |n - 2J^{(1)}|$$

---

[1]) t ist bei der Komposition $t\,\mathfrak{A}^{(1)}$ als Diagonalmatrix vom Typus von $\mathfrak{A}^{(1)}$ aufzufassen.

ist, und außerdem das Gleichungssystem

(51.) $$d^{(1)} = \text{Kern von } t^n\, d,$$

(52.) $$c_p^{(1)} = c_p \left(\frac{t,\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} d^{n+1}}{p} \right)$$

eine Lösung t besitzt, die für $J^{(1)} = J$ positiv, für $J^{(1)} = n - J$ negativ ist. Ich unterscheide nun die beiden ganz verschiedenartigen Fälle eines geraden oder ungeraden n.

a) n gerade.

Dann lauten (51.) und (52.):

(53.) $$d^{(1)} = d;$$

(54.) $$c_p^{(1)} \equiv c_p \left(\frac{t,\ (-1)^{\frac{n}{2}} d}{p} \right).$$

Bekanntlich [1]) hat (54.) dann und nur dann eine rationale Lösung t, wenn

(55.) $$c_p^{(1)} = c_p \text{ für } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} d}{p} \right) = +1$$

ist. Das Vorzeichen dieser Lösung t kann ferner so angenommen werden, daß es für $J^{(1)} = J$ positiv, für $J^{(1)} = n - J$ negativ ist. Denn ist $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} d}{p} \right) = +1$, so kann in (54.) sgn. $t = \left(\frac{t}{p_\infty} \right)$ beliebig gewählt werden. Ist aber $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} d}{p} \right) = -1$, so ist wegen $d_{p_\infty} = (-1)^J$:

(56.) $$\frac{n}{2} + J \equiv 1 \mod 2.$$

sgn. t bestimmt sich in diesem Falle nach (54.) aus

$$\left(\frac{t, -1}{p_\infty} \right) = \left(\frac{t}{p_\infty} \right) = \text{sgn. } t = c_{p_\infty}^{(1)}\, c_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2} + \frac{J^{(1)}(J^{(1)}+1)}{2}}.$$

Ist also $J^{(1)} = J$, so folgt sgn. $t = +1$, wie verlangt. Ist aber $J^{(1)} = n - J$, so folgt unter Benutzung von (56.):

$$\text{sgn. } t = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2} + \frac{(n-J)(n-J+1)}{2}} = (-1)^{\frac{2J^2 - 2nJ + n(n+1)}{2}} = (-1)^{J^2 - nJ + \frac{n}{2}}$$

$$= (-1)^{J^2 + \frac{n}{2}} = (-1)^{J^2 + J + 1} = -1,$$

wie es sein soll.

b) n ungerade.

Dann lauten (51.) und (52.):

(57.) $$d^{(1)} = \text{Kern von } td;$$

---

[1]) Siehe H II, Beweis zu Satz 7, S. 219.

$$c_p^{(1)} \equiv c_p \left(\frac{t, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p} \right). \tag{58.}$$

Es muß also nach (57.)

$$t = \text{Kern von } dd^{(1)}$$

genommen werden, und dies t befriedigt (58.) dann und nur dann, wenn

$$c_p^{(1)} \equiv c_p \left(\frac{dd^{(1)}, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p} \right),$$

d. h.

$$c_p^{(1)} \left(\frac{d^{(1)}, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p} \right) \equiv c \left(\frac{d, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p} \right) \tag{59.}$$

ist, und genügt der genannten Vorzeichenbedingung; denn es ist

$\text{sgn.}\, t = d_p \quad d_{p_\infty}^{(1)} = (-1)^{J+J^{(1)}} = +1$ oder -1, je nachdem $J^{(1)} = J$ oder $J^{(1)} + J = n$ ist.

Somit ergibt sich:

Satz 17. *Zwei Komplexe* $C\,\{n, d, J, (c_p)\}$ *und* $C^{(1)}\,\{n^{(1)}, d^{(1)}, J^{(1)}, (c_p^{(1)})\}$ *sind dann und nur dann multiplikativ-äquivalent, wenn zwischen ihren Invarianten folgende Bedingungen bestehen:*

$$n^{(1)} = n,$$
$$|n - 2\,J^{(1)}| = |n - 2\,J|$$

und für

a) *gerades* n:

$$d^{(1)} = d,$$
$$c_p^{(1)} = c_p \text{ für } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} d}{p} \right) = +1.$$

b) *ungerades* n:

$$c_p^{(1)} \left(\frac{d^{(1)}, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p} \right) \equiv c_p \left(\frac{d, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p} \right).$$

Für die multiplikative Äquivalenz sind also folgende, aus den Invarianten $n, d, J, (c_p)$ gegen gewöhnliche Äquivalenz abgeleiteten Invarianten maßgebend:

1. Die Invariante n ,
2. Die Invariante

   $$j = |n - 2\,J| \ , \tag{60.}$$

   d. h. der Absolutwert der Differenz zwischen der Anzahl der positiven und negativen Glieder einer reinen Form (nach *Frobenius*: die *Signatur*).
3. a) für gerades n:

   Die Invariante d
   und die Invarianten

   $$\gamma_p = c_p \text{ für } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} d}{p} \right) = +1 \ ^{1}). \tag{61a.}$$

b) für ungerades n:

Das Invariantensystem

$$\gamma_p \equiv c_p \left(\frac{d, (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p} \right). \tag{61b.}$$

Setzt man noch im Interesse einer einheitlichen Bezeichnung

$$\partial = \begin{Bmatrix} d \text{ für gerades } n \\ 1 \text{ für ungerades } n \end{Bmatrix}, \tag{62.}$$

so läßt sich Satz 17 auch so aussprechen:

Satz 18. *Zwei Komplexe sind dann und nur dann multiplikativ-äquivalent, wenn sie in ihren Invarianten $n, \partial, j, (\gamma_p)$ übereinstimmen.*

Ich bemerke zum Schluß wieder, daß auch hier die Kriterien für die multiplikative Äquivalenz in $K(1)$ sich aus den Kriterien für die einzelnen $K(p)$ zusammensetzen, sodaß wieder das Prinzip besteht:

Satz 19. *Zwei Komplexe sind dann und nur dann multiplikativ-äquivalent in $K(1)$, wenn sie es in allen $K(p)$ sind.*

§ 5. Die Komplexscharen.

Alle multiplikativ-äquivalenten Komplexe fasse ich in eine „*Komplexschar*" zusammen. Eine solche ist dann durch irgendeinen ihr angehörigen Komplex, also durch irgendeine ihr angehörige Form eindeutig bestimmt und besteht aus der Gesamtheit aller aus jener Form durch rationale Substitutionen und Multiplikation mit rationalen Zahlen hervorgehenden Formen. Zu jeder Komplexschar gehört nach Satz 18 ein eindeutig bestimmtes Invariantensystem $n, \partial, j, (\gamma_p)$, und umgekehrt kann zu einem solchen Invariantensystem auch höchstens eine Schar von Komplexen gehören.

Dies wird jedoch nicht für jedes beliebig vorgegebene System $n, \partial, j, (\gamma_p)$ der Fall sein. Es müssen vielmehr diese Invarianten gewissen Bedingungen genügen. Aus den Definitionsgleichungen (60.)—(62.) der Schar-Invarianten und den in H II aufgestellten Bedingungsgleichungen für die Komplex-Invarianten [2]) ergeben sich folgende notwendigen Bedingungen für die Invarianten $n, \partial, j, (\gamma_p)$ einer wirklichen Komplexschar:

$$0 \leqq j \leqq n, \tag{63.}$$

$$j \equiv n \bmod 2. \tag{64.}$$

a) n gerade.

$$\partial_{p_\infty} = (-1)^{\frac{n+j}{2}}, \tag{65.}$$

[1]) Die Einheiten γ_p werden hiernach also nur für die p definiert, für die $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} d}{p} \right) = +1$ ist, d. h. abgesehen von dem Spezialfall $d = (-1)^{\frac{n}{2}}$ nur für die Hälfte aller p.

[2]) H II, S. 220, Gl. (37.).

$$\gamma_{p_\infty} = (-1)^{\frac{\frac{n+j}{2}\left(\frac{n+j}{2}+1\right)}{2}+1} \quad \text{für } j \equiv 0 \bmod 4, \tag{66.}$$

$$\prod_p \gamma_p = +1 \quad \text{für } \partial = (-1)^{\frac{n}{2}}. \tag{67.}$$

b) n ungerade.

$$\partial = 1\,, \tag{68.}$$

$$\gamma_{p_\infty} = (-1)^{\frac{(nj)^2-1}{8}+1}\,, \tag{69.}$$

$$\prod_p \gamma_p = +1\,. \tag{70.}$$

(63.), (64.), (68.) bedürfen keiner weiteren Erläuterung, (70.) folgt ohne weiteres aus $\prod_p c_p = +1$, ebenso (67.), wobei aber zu berücksichtigen ist, daß nur für $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) \equiv +1$, d. h. für $\partial = (-1)^{\frac{n}{2}}$ das Invariantensystem (γ_p) mit dem vollen System (c_p) übereinstimmt. Um (65.), (66.), (69.) zu bestätigen, hat man aus den entsprechenden Bedingungen $d_p = (-1)^J$; $c_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1}$ solche für ∂_p , γ_p herzustellen. Dabei ist für J der aus (60.) folgende Ausdruck:

$$J = \frac{n \pm j}{2}$$

zu setzen. Man erhält

a) für gerades n

unter Berücksichtigung von

$$\frac{n+j}{2} \equiv \frac{n-j}{2} \bmod 2\,,$$

sowie für $j \equiv 0 \bmod 4$ sogar

$$\frac{n+j}{2} \equiv \frac{n-j}{2} \bmod 4\text{:}$$

$$\partial_{p_\infty} = d_{p_\infty} = (-1)^J = (-1)^{\frac{n+j}{2}}\,,$$

also (65.), ferner falls

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p_\infty}\right) = +1, \text{ d. h. } \frac{n}{2} + \frac{n+j}{2} \equiv 0 \bmod 2, \text{ also } j \equiv 0 \bmod 4\text{:}$$

$$\gamma_{p_\infty} = c_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1} = (-1)^{\frac{\frac{n+j}{2}\left(\frac{n+j}{2}+1\right)}{2}+1}\,,$$

also (66.).

b) für ungerades n:

$$\gamma_{p_\infty} = c_{p_\infty}\left(\frac{d,\,(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p}\right) = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1}\cdot(-1)^{J\frac{n+1}{2}} = (-1)^{J\frac{J+n+2}{2}+1} = (-1)^{\frac{J(J-n)}{2}+1}$$

$$= (-1)^{\frac{n\pm j}{2}\cdot\frac{-n\pm j}{2}\cdot\frac{1}{2}+1} = (-1)^{\frac{j^2-n^2}{8}+1} = (-1)^{\frac{(nj)^2-1}{8}+1}\,,$$

also (69.).

Die aus den Zusatzbedingungen (37 a.) und (37 b.) in H II für $n = 1$ und 2 hier folgenden Bedingungen aufzustellen, erübrigt sich. Man erkennt nämlich leicht unmittelbar:

Satz 20. *Alle unären Komplexe gehören zu der einen einzigen Komplexschar*

$$\mathfrak{S}\{1, 1, 1, (\varepsilon_p)\},$$

deren einfachster Vertreter die Form: (1) *ist.*

Satz 21. *Für die binären Komplexscharen ist $\partial = d$ die einzige unabhängige Invariante. Alle und nur die binären Komplexe gleicher Invariante d gehören zu einer Komplexschar*

$$\mathfrak{S}\{2, d, 1 + d_{p_\infty}, (+1)\},$$

deren einfachster Vertreter die Form: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ *ist.*

Beweise: 1. Daß alle unären Formen multiplikativ-äquivalent sind, ist klar. Für die Invarianten der unären Schar ergibt sich: $n = 1$; $\partial = 1$; $j = 1$; $\gamma_p \equiv c_p \left(\frac{d, -1}{p}\right)$, also wegen $c_p \equiv \left(\frac{-d, -1}{p}\right)$ für $n = 1$ (H II, S. 219, Gl. (31.)): $\gamma_p \equiv \left(\frac{-1, -1}{p}\right) \equiv \varepsilon_p$.

2. Für binäre Formen ist einerseits d invariant gegen Transformation und Multiplikation, andererseits jede Form der Invariante d multiplikativ-äquivalent zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Für die Invarianten der binären Schar der Invariante $\partial = d$ ergibt sich, da $c_p = +1$ für $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$ ist (H II, S. 221, Gl. (37 b.)):

$$\text{alle } \gamma_p = +1; \text{ (soweit definiert),}$$

ferner wegen

$$j = \begin{cases} 2 \text{ für } d > 0 \\ 0 \text{ für } d < 0 \end{cases}:$$

$$j = 1 + d_{p_\infty}.$$

Für $n \geqq 3$ beweise ich:

Satz 22. *Zu jedem Invariantensystem $n \geqq 3, \partial, j, (\gamma_p)$, das den Bedingungen* (63.)—(70.) *genügt, gehört eine und nur eine Komplexschar.*

Beweis: a) n gerade.

Ich weise nach, daß der Komplex mit den Invarianten

$$n;\ d = \partial;\ J = \frac{n + j}{2};$$

$$c_p = \begin{cases} \gamma_p \text{ für } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \partial}{p}\right) = +1 \\ \text{beliebig, jedoch } \prod_p c_p = +1 \text{ und ev. } c_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1} \text{ genügend, für } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \partial}{p}\right) \neq +1 \end{cases}$$

unter der Voraussetzung des Bestehens von (63.)—(67.) existiert. (c_p) kann stets

in der angegebenen Weise gewählt werden und genügt dann wegen (67.) auf jeden Fall der Bedingung $\prod_p c_p = +1$. Aus (64.) folgt, daß J ganz ist, und aus (63.), daß J der Bedingung $0 \leqq J \leqq n$ genügt, ferner aus (65.), daß $d_{p_\infty} = (-1)^J$ und aus (66.), daß, auch falls $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p_\infty}\right) = +1$ ist, $c_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1}$ wird. Nach H II, Satz 9, S. 220 existiert also der angegebene Komplex, dessen Komplexschar offenbar die vorgegebenen Invarianten $n, \partial, j, (\gamma_p)$ hat.

b) n ungerade.

Ich weise nach, daß der Komplex mit den Invarianten

$$n;\ d = \partial = 1;\ J = \frac{n \pm j}{2};\ c_p \equiv \gamma_p \left(\frac{d,\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{p}\right) \equiv \gamma_p$$

unter der Voraussetzung des Bestehens von (63.), (64.), (68.)–(70.) existiert, wenn über das Vorzeichen von j so verfügt wird, daß $J \equiv 0 \bmod 2$ wird. Dies ist zunächst stets möglich, da n und nach (64.) auch j ungerade ist. Aus (63.) folgt wieder: $0 \leqq J \leqq n$. Ferner ist wegen $J \equiv 0 \bmod 2$:

$$d_{p_\infty} = +1 = (-1)^J$$

und

$$(-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1} = (-1)^{\frac{J}{2}+1} = (-1)^{\frac{n+j}{4}+1}.$$

Da nun für $n \pm j \equiv 0 \bmod 4$:

$$(-1)^{\frac{n+j}{4}+1} = (-1)^{\frac{(nj)^2-1}{8}+1}$$

ist, folgt aus (69.):

$$c_{p_\infty} = \gamma_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1}.$$

Schließlich ist nach (70.) $\prod_p c_p = +1$. Also existiert der genannte Komplex, dessen Komplexschar offenbar die vorgeschriebenen Invarianten $n, \partial, j, (\gamma_p)$ hat, w. z. b. w.

Ich untersuche jetzt, wieviele verschiedene Komplexe eine Komplexschar enthält. Da man für ungerades n aus irgendeiner Form durch Multiplikation Formen jeder beliebigen Invariante d herleiten kann, enthält für ungerades n jede Schar unendlich viele Komplexe.

Für gerades n sind die Invarianten c_p der Komplexe einer Schar $\mathfrak{S}\{n, \partial, j, (\gamma_p)\}$ nur für die (unendlich vielen) p, für die $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) = +1$ ist, durch $c_p = \gamma_p$ festgelegt, für alle übrigen p bis auf die Bedingung $\prod_p c_p = +1$ und eine eventuelle für p_∞ frei wählbar. Nun ist entweder $\partial \neq (-1)^{\frac{n}{2}}$. Dann ist für unendlich viele p: $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) \neq +1$; es existieren also unendlich viele Komplexe in $\mathfrak{S}$. Oder es ist $\partial = (-1)^{\frac{n}{2}}$. Dann ist (c_p) durch $c_p \equiv \gamma_p$ vollständig festgelegt, und es können in

$\mathfrak{S}$ nur die beiden Komplexe

$$C_+\left\{n, (-1)^{\frac{n}{2}}, \frac{n+j}{2}, (\gamma_p)\right\} \text{ und } C_-\left\{n, (-1)^{\frac{n}{2}}, \frac{n-j}{2}, (\gamma_p)\right\}$$

existieren, die auch tatsächlich, falls $\mathfrak{S}$ existiert, stets beide existieren [1]).

Satz 23. *In einer Komplexschar $\mathfrak{S}\{n, \delta, j, (\gamma_p)\}$ existieren im allgemeinen unendlich viele Komplexe. Für gerades n enthalten jedoch die Scharen*

$$\mathfrak{S}_1\left\{n, (-1)^{\frac{n}{2}}, j, (\gamma_p)\right\}$$

nur die beiden Komplexe

$$C_+\left\{n, (-1)^{\frac{n}{2}}, \frac{n+j}{2}, (\gamma_p)\right\} \text{ und } C_-\left\{n, (-1)^{\frac{n}{2}}, \frac{n-j}{2}, (\gamma_p)\right\},$$

die für $j = 0$ in den einen Komplex

$$C_0\left\{n, (-1)^{\frac{n}{2}}, \frac{n}{2}, (\gamma_p)\right\} = \mathfrak{S}_0\left\{n, (-1)^{\frac{n}{2}}, 0, (\gamma_p)\right\}$$

zusammenfallen.

Alle und nur die Formen, die solchen Komplexen C_+, C_- angehören, haben demnach die Eigenschaft, durch Multiplikation mit jedem positiven t in äquivalente, mit jedem negativen t in Formen des anderen Komplexes überzugehen. Speziell gehen alle und nur die Formen eines Komplexes C_0 durch Multiplikation mit jedem t in äquivalente über. Aus allen anderen Formen kann man durch Multiplikation mit geeignetem t unendlich viele nicht äquivalente herleiten.

Satz 24. *Eine quadratische Form ist dann und nur dann jedem positiven rationalen Multiplum ihrer selbst äquivalent, wenn n gerade und $d = (-1)^{\frac{n}{2}}$ ist, und dann und nur dann jedem rationalen Multiplum ihrer selbst, wenn außerdem $J = \frac{n}{2}$, d. h. $j = 0$ ist.*

Die Invariante j einer Schar $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_0$ muß nach S. 33 unten den Bedingungen genügen:

$$j \equiv 0 \bmod 4;\ 0 \leqq j \leqq n,$$

die Invarianten γ_p den Bedingungen:

$$\prod_p \gamma_p = +1;\ \gamma_{p_\infty} = (-1)^{\frac{\frac{n+j}{2}\left(\frac{n+j}{2}+1\right)}{2}+1}.$$

Zu jeden diesen Bedingungen genügenden Invarianten j, (γ_p) existiert nach Satz 22 für $n \geqq 4$ eine Schar $\mathfrak{S}_1$ (für $j > 0$) mit zwei Komplexen C_+, C_-, bzw. eine Schar $\mathfrak{S}_0$ (für $j = 0$) mit einem einzigen Komplex C_0.

Als einfachste Beispiele für die Komplexe C_+, C_-, C_0 nenne ich die durch die Formen

---

[1]) Siehe Beweis zu Satz 22. Man kann Teil a.) dieses Beweises genau so mit $J = \frac{n-j}{2}$ führen.

$$\begin{pmatrix} E_{\frac{n+j}{2}} & 0 \\ 0 & -E_{\frac{n+j}{2}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} E_{\frac{n+j}{2}} & 0 \\ 0 & -E_{\frac{n-j}{2}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} E_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & -E_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}; \quad (j = 0 \bmod 4)$$

bestimmten Komplexe, von denen der durch die letzte bestimmte Komplex C_0 mit dem früher (§ 3) benutzten $C_{2\nu}$ für $\nu = \frac{n}{2}$ identisch ist. Repräsentanten anderer C_+, C_-, C_0 können nach H II, § 3, S. 218 ff. leicht gebildet werden. So ist z. B. für $n = 4$:

$-3x_1^2 - 3x_2^2 - 7x_3^2 - 7x_4^2$ eine Form aus $C_+ \left\{4,\ 1,\ 4,\ \left(\frac{-21,-1}{p}\right)\right\}$,

$3x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 7x_4^2$ „ „ „ $C_- \left\{4,\ 1,\ 0,\ \left(\frac{-21,-1}{p}\right)\right\}$,

$3x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 - 7x_4^2$ „ „ „ $C_0 \left\{4,\ 1,\ 2,\ \left(\frac{21,-1}{p}\right)\right\}$,

Für $n = 2$ existiert nach Satz 21 kein Komplex C_+, C_- sondern nur der Komplex

$$C_0\,\{2, -1, 1, (+1)\},$$

dessen einfachster Vertreter die Form: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0 \end{pmatrix}$ ist. Die aufgeführten Formen sind gleichzeitig Beispiele für die beiden in Satz 24 genannten Eigenschaften.

Im Anschluß an *Minkowski*[1]) behandle ich noch zwei weitere hierher gehörige Fragen.

1. *Wann ist eine quadratische Form irgendeinem negativen rationalen Multiplum ihrer selbst in $K(1)$ äquivalent, d. h. wann ist für einen Komplex C mit geeignetem $t > 0$: $C = -tC$?*

Die Invarianten von $-tC$ sind nach S. 30:

$$\bar{n} = n;\ \bar{d} = \begin{Bmatrix} d & \text{für gerades } n \\ \text{Kern von } -td & \text{für ungerades } n \end{Bmatrix};\ \bar{J} = n - J$$

$$\bar{c}_p \equiv c_p \left(\frac{-t,\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} d^{n+1}}{p}\right).$$

Sollen diese mit $n, d, J, (c_p)$ identisch sein, so muß zunächst n gerade und $J = \frac{n}{2}$ sein, ferner

$$\left(\frac{-t,\ (-1)^{\frac{n}{2}} d}{p}\right) \equiv +1 \tag{71.}$$

eine positive Lösung t haben. Wegen $\operatorname{sgn.} d = (-1)^J = (-1)^{\frac{n}{2}}$ ist dies stets der Fall. Es gilt also:

Satz 25. *Ein Komplex $C\{n, d, J, (c_p)\}$ ist dann und nur dann mit einem geeigneten negativen Multiplum seiner selbst identisch, wenn n gerade und $J = \frac{n}{2}$ ist, d. h. wenn er zu einer Schar der Signatur $j = 0$ gehört.*

---

[1]) Ges. Abh. I, S. 226 oder dieses Journ. Bd. 126, S. 13.

2. *Wann ist eine quadratische Form* $\mathfrak{A}$ *rational in* $-\mathfrak{A}$ *transformierbar?* Dann muß außer den vorigen Bedingungen überdies (71.) mit $t = +1$ bestehen, d. h.

$$\left(\frac{-1,\,(-1)^{\frac{n}{2}}d}{p}\right) = +1 \tag{72.}$$

sein. Für p_∞ stimmt dies, wie eben, für alle ungeraden p dann und nur dann, wenn d keinen Primfaktor der Form $4k+3$ enthält. Ist dies der Fall, so besteht (72.) nach dem Produktsatz auch für $p=2$, und dann ist der Komplex $C = -C$. Es gilt also:

Satz 26. *Ein Komplex* $C\,\{n, d, J, (c_p)\}$ *ist dann und nur dann mit* $-C$ *identisch, wenn* n *gerade,* $J = \frac{n}{2}$ *und in* d *kein Primfaktor der Form* $4k+3$ *enthalten ist, d. h. wenn er zu einer Schar mit der Signatur* $j=0$ *gehört, deren Invariante* ∂ *keinen Primfaktor der Form* $4k+3$ *enthält.*

§ 6. Diskussion der Darstellbarkeitskriterien für die Null.

Die Komplexscharen stehen in enger Beziehung zu der ν-ären Darstellbarkeit der Null durch ihre Formen. Da diese Darstellbarkeit nämlich gegen Transformation und Multiplikation der betr. Form invariant ist, stellen alle Formen einer Schar die Null gleichzeitig ν-är dar oder nicht. Die in § 3 hierfür entwickelten Kriterien dürfen daher in Wahrheit nur von den Invarianten n, ∂, j, (γ_p) der betr. Schar abhängen. In der Tat lassen sich die in Satz 15 (S. 28) zusammengestellten Bedingungen durch diese Invarianten folgendermaßen ausdrücken:

Satz 27. *Die Null ist durch eine Komplexschar* $\{\mathfrak{S}\, n, \partial, j, (\gamma_p)\}$ *dann und nur dann* ν*-är darstellbar, wenn die Bedingungen bestehen:*

$$\nu \leqq \frac{n}{2}$$

und für

1.) $n - 2\nu \geqq 3$, *d. h.* $\nu \leqq \frac{n-3}{2}$:

$$j \leqq n - 2\nu.$$

2.) $n - 2\nu = 2$, *d. h. n gerade und* $\nu = \frac{n}{2} - 1$:

$$\begin{cases} j = 0 \text{ oder } 2, \\ \gamma_p = \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1} \text{ (für } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) = +1\text{).} \end{cases}$$

3.) $n - 2\nu = 1$, *d. h. n ungerade und* $\nu = \frac{n-1}{2}$:

$$\begin{cases} j = 1, \\ \gamma_p \equiv \varepsilon_p^{\frac{n^2-1}{8}+1}. \end{cases}$$

4.) $n - 2\nu = 0$, *d. h. n gerade und* $\nu = \frac{n}{2}$:

$$j = 0; \quad \partial = (-1)^{\frac{n}{2}}; \quad \gamma_p \equiv \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1}.$$

Ich ziehe jetzt aus diesen Kriterien entsprechende Folgerungen, wie in § 2 aus den Darstellbarkeitskriterien für von Null verschiedene Formen. Dabei nenne ich die Größe $n - 2\nu$ wieder den *Defekt* einer ν-ären Darstellung der Null. Demnach ist zur ν-ären Darstellbarkeit der Null durch eine Schar $\mathfrak{S}\{n, \partial, j, (\gamma_p)\}$ stets notwendig, daß deren Signatur j den Defekt nicht übersteigt. Dies ist ersichtlich wieder nur die allgemeinste Formulierung des *Sylvester*schen Trägheitsgesetzes. Für Darstellungen der Null eines Defektes $\geqq 3$ ist diese Bedingung auch schon hinreichend. Alle (unendlich vielen) Komplexscharen, deren Signatur der genannten Bedingung genügt, stellen die Null mit jedem Defekt $\geqq 3$ dar.

Ein größeres Interesse, als dieser allgemeine Fall, in dem nur die triviale „Trägheitsbedingung" auftritt, beanspruchen wieder die Darstellungen der Null vom Defekt 2, 1 oder 0.

Soll zunächst die Null durch eine Schar $\mathfrak{S}$ (mit geradem n) mit dem Defekt 2 darstellbar sein, so ist nach Satz 27, 2.) zu jedem bestimmten ∂ das Invariantensystem (γ_p) vollständig festgelegt. Da aber außerdem wegen $\partial_{p_\infty} = (-1)^{\frac{n+j}{2}}$ zu einem bestimmten ∂ nur einer der beiden möglichen Werte $j = 0$ oder 2 gehören kann, nämlich $j = 1 - (-1)^{\frac{n}{2}} \partial_{p_\infty}$, folgt:

Satz 28. *Zu jeder Invariante* ∂ *existiert eine und nur eine n-äre Komplexschar* (*n gerade*), *die die Null* $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$*-är darstellt, nämlich die Schar mit den Invarianten*;

$$n; \ \partial; \ j = 1 - (-1)^{\frac{n}{2}} \partial_{p_\infty}; \ \gamma_p = \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1} \ (\textit{für} \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) = +1).$$

Daß diese Schar für jedes gerade n und jedes ∂ wirklich existiert, ergibt sich aus dem leicht zu bestätigenden Erfülltsein der dafür notwendigen und hinreichenden Bedingungen (63.)—(67.), S. 33/34.

Als Beispiele gebe ich:

1. $n = 4; \ \partial = -1.$

Dann ist also:

$$j = 2; \text{ alle } \gamma_p = +1.$$

Ein Repräsentant dieser Schar $\mathfrak{S}\{4, -1, 2, (+1)\}$ ist die Form:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

2. $n = 4; \ \partial = 7.$

Dann ist also:

$$j = 0; \text{ alle } \gamma_p = +1.$$

Ein Repräsentant dieser Schar $\mathfrak{S}\{4, 7, 0, (+1)\}$ ist die Form:

$$7x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

Ferner ergibt sich unmittelbar aus Satz 27, 3.):

Satz 29. *Mit dem Defekt* 1 *stellt einzig und allein die n-äre Komplexschar* (*n ungerade*)

$$\mathfrak{S}\left\{n,\ 1,\ 1,\ \varepsilon_p^{\frac{n^2-1}{8}+1}\right\} \text{ die Null } \frac{n-1}{2}\text{-är, d. h. } \left[\frac{n}{2}\right]\text{-är dar.}$$

Die genannte Schar existiert nach Satz 22 (S. 35) für jedes ungerade n. Ihr einfachster Repräsentant ist die Form:

$$\begin{pmatrix} E_{\frac{n-1}{2}} & O \\ O & -E_{\frac{n+1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Schließlich folgt aus Satz 27, 4.):

Satz 30. *Mit dem Defekt* 0 *stellt einzig und allein die n-äre Komplexschar* (*n gerade*)

$$\mathfrak{S}\left\{n,\ (-1)^{\frac{n}{2}},\ 0,\ \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1}\right\} \text{ die Null } \frac{n}{2}\text{-är, d. h. } \left[\frac{n}{2}\right]\text{-är dar.}$$

Diese Schar existiert ebenfalls für jedes gerade n und ist eine spezielle der in § 5, Satz 23 (S. 37) genannten Scharen $\mathfrak{S}_0$ [1]) mit dem einfachsten Repräsentanten:

$$\begin{pmatrix} E_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & -E_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix},$$

der dem in § 3 benutzten Komplex $C_{2\nu}$ für $\nu = \frac{n}{2}$ angehört.

Das in § 2 hervorgehobene Anwachsen der einen Komplex darstellenden oder durch ihn darstellbaren Komplexe bei einem von 0 bis 3 steigenden Defekt von einem einzigen bis zur größtmöglichen Mannigfaltigkeit von Komplexen findet sich für die Darstellungen der Null durch Komplexscharen in ganz analoger Weise wieder. Mit dem kleinstmöglichen Defekt 0 und 1 ist die Null nur durch je eine einzige Komplexschar ν-är darstellbar, mit dem Defekt 2 durch gewisse unendlich viele Scharen, (nämlich zu jedem beliebig vorgegebenen ∂ nur durch eine einzige), mit einem Defekt $\geqq 3$ durch alle Scharen, deren Signatur j den Defekt nicht übersteigt.

Da in $K(1)$ multiplikativ-äquivalente Formen es auch in allen *Hensel*schen $K(p)$ sind, also die Null in jedem $K(p)$ gleichzeitig ν-är darstellen oder nicht, ist die Gesamtheit aller p, für die die Null ν-är in $K(p)$ darstellbar ist (die Gesamtheit der „*ν-ären Teiler*“ einer Form), und ebenso die Gesamtheit der „*ν-ären Nichtteiler*“ für alle Formen einer Schar dieselbe. Ähnlich nun, wie die Darstellungen von Komplexen untereinander von kleinstmöglichem [2]) Defekt 1 durch die in Satz 9 und 10 (S. 22/23) ausgesprochene charakteristische Eigenschaft vor denen höherer Defekte ausgezeichnet sind, gilt hier für die Komplexscharen:

Satz 31. *Eine n-äre Komplexschar ist durch Angabe ihrer Signatur j und des vollständigen Systems derjenigen Körper $K(p)$, in denen sie die Null mit dem kleinst-*

---

[1]) Sie enthält also nur einen einzigen Komplex.

[2]) Abgesehen von dem trivialen Defekt 0, wo die Komplexe identisch sein müssen.

möglichen Defekt 0 *oder* 1, *d. h.* $\left[\frac{n}{2}\right]$*-är darstellt, oder, wie man sagen kann, durch* j *und das System ihrer* $\left[\frac{n}{2}\right]$*-ären Teiler eindeutig bestimmt.*

Beweis: Seien $\mathfrak{S}\{n, \partial, j, (\gamma_p)\}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}\{n, \partial^{(1)}, j, (\gamma_p^{(1)})\}$ zwei n-äre Komplexscharen gleicher Signatur j und die Null durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ gleichzeitig $\left[\frac{n}{2}\right]$-är in jedem $K(p)$ darstellbar oder nicht darstellbar.

a) n gerade.

Dann ist $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$. Nach Satz 27, 4.) (S. 40) muß, da die dortige Beziehung $(-1)^{\frac{n}{2}}\partial = +1$ für einen einzelnen $K(p)$: $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) = +1$ lautet, für

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) = +1 \text{ auch } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial^{(1)}}{p}\right) = +1$$

und umgekehrt für

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial^{(1)}}{p}\right) = +1 \text{ auch } \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) = +1$$

sein, wobei p jede beliebige Primzahl einschl. p_∞ bedeutet. Wäre nun $\partial \neq \partial^{(1)}$, also $\partial\partial^{(1)}$ kein Quadrat in $K(1)$, so gäbe es sicher ein in $\partial\partial^{(1)}$ nicht aufgehendes, ungerades p, für das $\left(\frac{\partial\partial^{(1)}}{p}\right) \neq +1$, also etwa $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial^{(1)}}{p}\right) \neq +1$ wäre. Also ist $\partial = \partial^{(1)}$. Ferner folgt aus der Voraussetzung und Satz 27, 4.) für alle p, für die $\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial}{p}\right) = \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\partial^{(1)}}{p}\right) = +1$ ist, das Übereinstimmen von γ_p und $\gamma_p^{(1)}$, da beide gleich $\pm\, \varepsilon_p^{\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}+1}$ sein müssen (+ oder −, je nachdem die Null $\left[\frac{n}{2}\right]$-är in dem betr. $K(p)$ darstellbar ist oder nicht). Die Scharen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ stimmen also in ihren Invarianten $n, \partial, j, (\gamma_p)$ überein und sind mithin identisch.

b) n ungerade.

Dann ist $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$. Nach Satz 27, 3.) und der Voraussetzung ist für jedes p

$$\gamma_p = \gamma_p^{(1)} = \pm\, \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}+1}.$$

Es ist also $\gamma_p \equiv \gamma_p^{(1)}$ und folglich $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{(1)}$, w. z. b. w.

Für Darstellungen der Null von höherem Defekt gilt die Behauptung des letzten Satzes offenbar nicht. Für einen Defekt $\geqq 3$ ist dies ohne weiteres klar,

da dann die Null höchstens in $K(p_\infty)$ nicht darstellbar ist. Für den Defekt 2 gibt es nach Satz 28 (S. 40) z. B. unendlich viele Scharen, die die Null in allen $K(p)$ $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-är darstellen, also alle p zu $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-ären Teilern haben, ebenso wie man leicht analog bestätigt, für jedes andere vorgegebene Teilersystem. Damit ist also schließlich gezeigt, daß die in Satz 31 ausgesprochene Eigenschaft für die Darstellungen der Null vom Defekt 0 oder 1 charakteristisch ist.

Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome und zum Summationsproblem von Orthogonalsystemen.

Von Herrn *G. Wiarda* in Dresden.

Unter einem (normierten) Orthogonalsystem (φ) für das Intervall $a \ldots b$ verstehen wir ein System von reellen, in $a \ldots b$ stetigen Funktionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x), \ldots$, für welche

$$\int_a^b \varphi_\mu(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mu \neq \nu \\ 1, & \text{wenn } \mu = \nu \end{cases} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Ist $g(x)$ irgendeine für $a \leqq x \leqq b$ stetige [1]) Funktion, so heißt die formal gebildete Reihe

$$F_g = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu\, \varphi_\nu(x), \text{ mit } \gamma_\nu = \int_a^b g(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx$$

die zu (φ) gehörige *Fourier*reihe von $g(x)$. Von den vielen auf diese Reihen bezüglichen Fragen wollen wir an die eine anknüpfen: *Ist F_g konvergent, und wenn nicht, ist sie vielleicht mittels der Methode der arithmetischen Mittel summierbar?*

Allgemein heißt eine Reihe $v_0 + v_1 + \cdots$ von k-ter Ordnung summabel (im *Cesàro*schen Sinne), wenn

$\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{k!\, \sigma_n^{(k)}}{n^k} = S$ oder, was gleichbedeutend ist, wenn $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\Gamma(n+1)\, \Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\, \sigma_n^{(k)} = S$

existiert, wo die $\sigma_n^{(k)}$ definiert sind durch

$\sigma_n^{(0)} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$; $\sigma_n^{(1)} = \sigma_0^{(0)} + \sigma_1^{(0)} + \cdots + \sigma_n^{(0)}$; $\sigma_n^{(2)} = \sigma_0^{(1)} + \cdots \sigma_n^{(1)}$; usw.

Eine konvergente Reihe ist von 0-ter Ordnung summabel.

Nach dem *Knopp-Schnee*schen Satz [2]) ist völlig äquivalent hiermit die Summabilität im *Hölder*schen Sinne.

Bei näherer Verfolgung der Summationstheorie eines beliebigen Systems (φ) ist es zweckmäßig, die in $a \ldots b$ stetigen Funktionen in zwei Klassen zu teilen, solche, die zu dem „Bereiche" von (φ) gehören, und die anderen. Dabei verstehen [3])

---

[1]) Nur um solche handelt es sich auch weiterhin.

[2]) Vgl. *Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (1916), § 5.

[3]) Vgl. *Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Dissertation, (1909) S. 14.

wir unter dem Bereiche von (φ) die Gesamtheit derjenigen $g(x)$, für welche sich bei jedem $\varepsilon > 0$ derart Konstanten $c_0, c_1, \ldots c_m$ finden lassen, daß für jedes x des Intervalles $|g(x) - (c_0 \varphi_0(x) + \cdots + c_m \varphi_m(x)| < \varepsilon$ ist. Bei den trigonometrischen Funktionen z. B. besteht der Bereich aus allen $g(x)$, für welche $g(0) = g(2\pi)$ ist.

Wir definieren nun: *Das System (φ) heißt an der Stelle x_0 im engeren bzw. weiteren Sinne summabel von der k-ten Ordnung, wenn für jedes $g(x)$ des Bereiches von (φ) die Reihe F_g von k-ter Ordnung summabel ist bzw. wenn dies für jedes beliebige (stetige) $g(x)$ gilt. (φ) heißt schlechthin summabel von k-ter Ordnung, wenn dies für jedes x_0 des Intervalles gilt.*

Über die Summabilität eines Systemes (φ) hat *Haar* (l. c.) die folgenden beiden Sätze bewiesen:

I. Das System (φ) ist an der Stelle x_0 (im engeren Sinne) von k-ter Ordnung summabel, wenn die Werte

$$\varrho_n^{(k)}(x_0) = \int_a^b \left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(k+n+1-\nu)}{\Gamma(n+1-\nu)\,\Gamma(k+n+1)} \varphi_\nu(x_0)\,\varphi_\nu(x) \right| dx \leqq G$$

bleiben, wo G von n unabhängig ist.

II. Das System (φ) ist an der Stelle x_0 (im weiteren Sinne) sicher nicht von k-ter Ordnung summabel, wenn $\limsup_{n=\infty} \varrho_n^{(k)}(x_0) = \infty$ ist.

Durch die Arbeiten von *Fejér* [1]), *Haar* [2]) und *Gronwall* [3]) ist erwiesen, daß die trigonometrischen, die Kugel- und die *Sturm-Liouville*schen Funktionen summabel 1. Ordnung sind. Es soll nun, nachdem in § 1 einige Eigenschaften der *Laguerre*schen Polynome abgeleitet werden, im § 2 die Summabilität eines andern Orthogonalsystemes (φ) untersucht werden, welches mit diesen Polynomen eng zusammenhängt. Auch diese φ genügen (wie die genannten Funktionen) einer gewissen Differentialgleichung 2. Ordnung; diese aber ist nicht sich selbst adjungiert, so daß die φ nicht etwa spezielle *Sturm-Liouville*sche Funktionen sind.

Daß die Summabilität nicht etwa eine jedem Orthogonalsystem (φ) eo ipso anhaftende Eigenschaft ist, lehrt § 3, in welchem das Beispiel eines Systemes (φ) gegeben wird, welches von keiner noch so hohen Ordnung summabel ist.

---

[1]) *Fejér*, Untersuchungen über *Fourier*sche Reihen, Math. Ann., Bd. 58, S. 51—69.

[2]) *Haar*, Diss. (vgl. [3]) S. 1). *Haar* beweist, daß die Kugelfunktionen und die *Sturm-Liouville*schen Funktionen nicht summierbar von 0-ter Ordnung, daß aber die letzteren summierbar 1. Ordnung sind.

[3]) *Gronwall*, Über die *Laplace*sche Reihe, Math. Ann., Bd. 74, S. 213—270 (1913). Hier wird die Summierbarkeit 1. Ordnung für das System der Kugelfunktionen bewiesen. Die Verallgemeinerung der Summierbarkeit für nicht ganzes k wird bei den Kugelfunktionen von demselben Verfasser in der Arbeit „Über die Summierbarkeit der Reihen von *Laplace* und *Legendre*“, Math. Ann. Bd. 75 behandelt, wobei sich unter einer gewissen (notwendigen) einschränkenden Bedingung Summierbarkeit für $k > \frac{1}{2}$, dagegen Nichtsummierbarkeit für $k \leqq \frac{1}{2}$ ergibt.

§ 1. Eigenschaften der *Laguerre*schen Polynome.

Die *Laguerre*schen Polynome $L_n(u)$ sind definiert durch

$$(1.) \qquad \frac{e^{-u\frac{z}{1-z}}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(u)\, z^n \quad (|z|<1).$$

Man zeigt leicht, daß die $L_n(u)$ wirklich Polynome n-ten Grades sind und genauer so aussehen:

$$(2.) \qquad L_n(u) = 1 - \binom{n}{1}\frac{u}{1!} + \binom{n}{2}\frac{u^2}{2!} \mp \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}\frac{u^n}{n!}.$$

Ferner ergibt sich sofort die Rekursionsformel

$$(3.) \qquad (n+1)\, L_{n+1} - (2n+1-u)\, L_n + n\, L_{n-1} = 0$$

sowie

$$(4_1.)\ L_0 + L_1 + \cdots + L_n = -\, L'_{n+1} \text{ und } (4_2.)\ u\, L'_n = n\,(L_n - L_{n-1})$$

und die Differentialgleichung

$$(5.) \qquad u\, L''_n + (1-u)\, L'_n + n\, L_n = 0;$$

diese gehört, im Gegensatz zu der der Kugelfunktionen, nicht zur *Fuchs*schen Klasse.

$(4_1.)$ läßt sich mehrfach verallgemeinern; einerseits ist nämlich

$$(6.) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} L_\nu(u)\, L_\nu(v) = -\,(n+1)\,\frac{L_{n+1}(u)\, L_n(v) - L_{n+1}(v)\, L_n(u)}{u-v},$$

wie sich leicht durch den Schluß von $n-1$ auf n zeigen läßt. (6.) ist das Analogon zu der bekannten *Christoffel*schen Formel [1]) der *Legendre*schen Polynome $P_\nu(u)$, nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2}\, P_\nu(u)\, P_\nu(v) = \frac{n+1}{2}\,\frac{P_{n+1}(u)\, P_n(v) - P_{n+1}(v)\, P_n(u)}{u-v}.$$

Unter Beachtung von $(4_2.)$ sieht man, daß $(4_1.)$ als Spezialfall $(v=0)$ in (6.) enthalten ist. Durch Grenzübergang $v \to u$ folgt aus (6.)

$$(6'.) \qquad \frac{L_0^2(u) + L_1^2(u) + \cdots + L_n^2(u)}{n+1} = -\, L_n(u)\, L'_{n+1}(u) + L'_n(u)\, L_{n+1}(u).$$

Andererseits gilt die später zu benutzende Formel

$$(7.) \qquad (n+1)\, L_0 + n\, L_1 + \cdots + 2\, L_{n-1} + L_n = +\, L''_{n+2},$$

und allgemein läßt sich $(-1)^k L^{(k)}_{n+k}$ additiv durch $L_0, L_1, \ldots L_n$ analog darstellen.

Ein Gegenstück zu $(4_1.)$ ist die leicht beweisbare Gleichung

$$(8.) \qquad 1 + \frac{u}{1} L'_1(u) + \frac{u}{2} L'_2(u) + \cdots + \frac{u}{n} L'_n(u) = L_n(u),$$

und (8.) und $(4_1.)$ sind wiederum Spezialfälle der beiden folgenden, als Additionstheoreme der *Laguerre*schen Polynome anzusprechenden Formeln:

---

[1]) *Christoffel*, dieses Journal, Bd. 55, S. 73; Werke I, S. 77.

$$(9.)\quad \begin{cases} L_n(u+v) = 1\cdot L_n(v) + \frac{u}{1} L_1'(u) L_{n-1}(v) + \frac{u}{2} L_2'(u) L_{n-2}(v) + \cdots + \frac{u}{n} L(u) L_0(v) \\ -L_{n+1}'(u+v) = L_0(u) L_n(v) + L_1(u) L_{n-1}(v) + \cdots + L_n(u) L_0(v). \end{cases}$$

Solcher Zusammenhänge gibt es noch mehr, worauf hier nicht eingegangen werden soll.

Über die Nullstellen der $L_n(u)$ gilt folgender wichtige Satz: *Die Nullstellen* $\lambda_{ni} (i = 1, 2, \ldots n)$ *der Laguerreschen Polynome* $L_n(u)$ *sind sämtlich reell positiv und voneinander verschieden. Laguerre* beweist dies aus einer später zu nennenden Integraleigenschaft der L_n; man kann es aber auch rein algebraisch leicht zeigen: ein Weg ergibt sich, wenn man beachtet, daß die Funktionen $L_n, -L_{n-1}, +L_{n-2}, \ldots, (-1)^n L_0$ eine *Sturm*sche Kette (im weiteren Sinne) für das Intervall $0 \ldots +\infty$ bilden, ein anderer, eleganterer aus dem bekannten [1]) Satze: Wenn $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ nur reelle Wurzeln hat, so auch $1 \cdot a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^n = 0$; man braucht als Ausgangsgleichung nur $(1-u)^n = 0$ zu nehmen, um alles leicht zu folgern. Die Verschiedenheit der Wurzeln folgt aus $(4_2.)$.

In Verbindung hiermit gestattet $(4_2.)$ einen interessanten geometrischen Schluß: die Kurven $y = L_{n-1}$ und $y = L_n$ schneiden sich (außer für $u = 0$) genau in den Extremstellen von L_n, und zwar so, daß L_{n-1} an den Maxima von L_n steigt, an den Minima fällt.

Aus $(4_2.)$ folgt sofort $\lambda_{ni} < \lambda_{n-1,i} < \lambda_{n,i+1}$; d. h. die Wurzeln von L_{n-1} liegen genau in den Lücken zwischen den Wurzeln von L_n.

Über die Größe der Wurzeln gilt zunächst die triviale Abschätzung $\frac{1}{n} \leqq \lambda_{ni} \leqq n^2$ und nach obiger Ungleichung sogar $\lambda_{ni} \leqq i^2$; ferner ergibt sich leicht $\lambda_{nn} \geqq 2n-1$. Einer mündlichen Mitteilung von Herrn *Neumann* verdanke ich die viel bessere Abschätzung [2])

$$(10.)\qquad \lambda_{ni} \leqq 4 \cdot \frac{(i+1)(i+2)}{n+1},\ (i = 1, 2, \ldots n).$$

Ohne den Beweis hier anzugeben sei hier noch der Wert des Differenzenproduktes genannt; es ist

$$P_n^2 = \prod_{\varrho > \sigma} (\lambda_{n\varrho} - \lambda_{n\sigma})^2 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 4^7 \ldots n^{2n-1}\ (n > 1;\ P_1^2 = 1).$$

---

[1]) Vgl. *Laguerre*, Werke I, S. 34.

[2]) Inzwischen ist in den Jahresberichten d. Deutschen Math. Verein., Bd XXX, die Arbeit *E. R. Neumann*, Beiträge zur Kenntnis der *Laguerre*schen Polynome erschienen, in der neben manchen anderen interessanten Resultaten über die L_n folgende wichtige Abschätzung gewonnen wird: (10′.) $\lambda_{ni} = C_{ni} \frac{(i+1)^2}{n+1}$ mit $\frac{1}{4} < C_{ni} < 4$ (l. c. S. 26). Aus $\lambda_{n1} \cdot \lambda_{n2} \ldots \lambda_{nn} = n!$ folgt übrigens mit Benutzung des *Cauchy*schen Grenzwertsatzes: aus $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$ ergibt sich $\lim \sqrt[n]{a_n} = A$, leicht $\sqrt[n]{C_{n1} C_{n2} \ldots C_{nn}} \to e$ bei $n \to \infty$.

Es sollen nun einige interessante und tiefer liegende Abschätzungen und Limesrelationen hergestellt werden. Herr *Szegö* hat in seiner Arbeit „Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von *Laguerre* und *Jacobi*" (Math. Zeitschrift, Bd. 1)

$$L_n^2(u) \leqq e^u \tag{11.}$$

bewiesen [1]). Bei festem u und wachsendem n ist jedoch (11.) für die meisten der $L_0, L_1, \ldots L_n$ eine sehr rohe Abschätzung; ich beweise nämlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{L_0^2 + L_1^2 + \cdots + L_n^2}{n} = 0 \quad (u > 0 \text{ und fest}), \tag{12.}$$

d. h. die Anzahl $m_n(\varepsilon)$, für welche $L_k^2(u) < \varepsilon$ ist $\sim n$, oder, anders ausgedrückt: es ist $\lim\limits_{n=\infty} \frac{m_n(\varepsilon)}{n} = 1$.

Um (12.) zu beweisen, sei vorausgeschickt der

Hilfssatz: Ist für reelles positives $r < 1$ die Reihe $f(r) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konvergent, sind ferner alle a_n reell und $\geqq 0$ und ist endlich (bei $r < 1$) $\lim\limits_{r=1} (1 - r) f(r) = 0$, so ist $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0$.

Beweis [2]): Es ist $a_0 + a_1 + \cdots + a_n \leqq \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\frac{n-\nu}{n}} \leqq e \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-\frac{\nu}{n}} = e \cdot f(e^{-\frac{1}{n}})$;

also weiter: $\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n} \leqq \frac{e f(e^{-\frac{1}{n}})(1 - e^{-\frac{1}{n}})}{n(1 - e^{-\frac{1}{n}})} = e \frac{(1 - e^{-\frac{1}{n}}) f(e^{-\frac{1}{n}})}{1 + o(1)}$, wo $o(1)$ ein Glied bedeutet, welches $\to 0$ strebt bei $n \to \infty$. Da im letzten Ausdruck der Zähler $\to 0$ geht, so ist der Hilfssatz bewiesen.

(12.) beweise ich nun so: ich setze, bei $z = r e^{i\varphi}$ mit $r < 1$,

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{-u\frac{z}{1-z}}}{1 - z} \right|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^2(u)\, r^{2n}.$$

Nach dem Hilfssatz braucht also nur $\lim\limits_{r=1} (1 - r) \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{e^{-u\frac{z}{1-z}}}{1 - z} \right|^2 d\varphi = 0 \; (r < 1)$ bewiesen zu werden. Eine leichte Rechnung lehrt

$$\left| \frac{e^{-u\frac{z}{1-z}}}{1 - z} \right|^2 = e^u \frac{e^{-u\frac{(1-r)(1+r)}{1-2r\cos\varphi+r^2}}}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = e^u \cdot F(\varphi).$$

Es ist also (12.) bewiesen, wenn $\lim\limits_{r=1} (1 - r) \int\limits_0^{\pi} F(\varphi)\, d\varphi = 0$ ist $(r < 1;\ u > 0)$.

Führen wir statt φ erst die neue Variable $x = \frac{1}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}$ und dann $t = \frac{(1 - r^2)^2 x - (1 + r^2)}{2r}$ ein, so ergibt sich nach elementaren Rechnungen

[1]) Eine Verschärfung dieser Abschätzung bringt *E. R. Neumann*, l. c.

[2]) Wegen des Gedankenganges vgl. *Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, S. 50 Mitte.

$$\int_0^{\pi} F(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{(1-r)(1+r)} \int_{-1}^{+1} e^{-u\frac{1+r^2+2rt}{(1-r)(1+r)}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}$$
$$= \frac{1}{(1-r)(1+r)} \left[\int_{-1}^{A} + \int_{A}^{+1} \right].$$

Also ist

$$(1-r) \int_0^{\pi} F(\varphi)\,d\varphi \leqq \frac{1}{1+r} e^{-u\frac{1-r}{1+r}} [\arcsin t]_{-1}^{A} + \frac{1}{1+r} e^{-u\frac{1+r^2+2rA}{(1-r)(1+r)}} [\arcsin t]_{A}^{+1}.$$

Für das bisher noch unbestimmte A wähle ich nun den Wert $A = \frac{\sqrt{1-r}-1-r^2}{2r}$, der gewiß zwischen -1 und $+1$ liegt; da ferner bei $r \to 1$ das $A \to -1$ strebt, so geht bei $r \to 1$ der erste Summand in der letzten Ungleichung $\to 0$ wegen des Zusammenrückens der beiden Grenzen; der zweite Summand aber strebt gegen 0 wegen des Faktors $e^{-u\frac{1}{\sqrt{1-r}(1+r)}}$, wenigstens, wenn $u>0$ (wie vorausgesetzt). Damit ist (12.) bewiesen.

Eine weitere Limesrelation läßt sich hieraus folgern; ich behaupte:

$$(13.) \quad \lim_{n=\infty} \left(L_n'^2(u)\frac{u}{n} + L_n(u)\,L_{n-1}(u) \right) = 0 \text{ (bei festem } u > 0).$$

Beweis: Aus (3.) und (4_2.) folgt (für $u>0$) durch elementare Umrechnung einerseits

$$L_{n+1}'(u)\,L_n(u) - L_n'(u)\,L_{n+1}(u) = -\frac{u}{n} L_n'^2(u) - L_n(u)\,L_{n-1}(u) + o(1),$$

wo $o(1)$ wieder ein Restglied bedeutet, welches bei $n \to \infty$ gegen Null strebt; andererseits strebt die linke Seite wegen (6′.) und (12.) gegen 0, womit (13.) bewiesen ist.

(13.) besagt u. a., daß bei festem $u>0$ und $n \to \infty$ $|L_n'(u)|$ höchstens wie $\sqrt{n}$ wachsen kann, wofür man kurz schreibt $L_n'(u) = O(\sqrt{n})$.

Aus (13.) folgt weiter

$$(14.) \quad \lim_{n=\infty} (L_n^2(u) - L_{n+1}(u)\,L_{n-1}(u)) = 0,$$

und zwar gleichmäßig für $0 \leqq u \leqq U$; denn es war einerseits $L_n' L_{n+1} - L_{n+1}' L_n = o(1)$ (für $u>0$), andererseits ist, unter Benutzung von (4_2.), $L_n' L_{n+1} - L_{n+1}' L_n = \frac{n+1}{u} L_n^2 - \frac{n}{u} L_{n+1} L_{n-1} - \frac{1}{u} L_n L_{n+1}$, also $n L_n^2 - n L_{n+1} L_{n-1} = u \cdot o(1) + O(1) = O(1)$ ein bei $n \to \infty$ endlich bleibender Ausdruck; damit ist (14.) bewiesen; genauer ist sogar bewiesen:

$$(14'.) \quad \lim_{n=\infty} n^{1-\varepsilon} (L_n^2(u) - L_{n+1}(u)\,L_{n-1}(u)) = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Die Gleichmäßigkeit folgt wegen $|L_n| \leqq e^{\frac{U}{2}}$ für alle positiven $u \leqq U$; und für $u=0$ ist (14.) trivial.

Während das arithmetische Mittel der $L_0^2, \ldots L_n^2$ nach (12.) $\to 0$ strebt, ist

$$(15.) \quad \lim_{n=\infty} (L_0^2 + L_1^2 + \cdots + L_n^2) = \infty.$$

Beweis: Mit Benutzung der Bezeichnungen des Beweises für (12.) ist zunächst:

$$f(r) = \frac{1}{\pi} e^u \int_0^{\pi} F(\varphi)\, d\varphi \geqq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-r)(1+r)} \left[\int_{-1}^{\frac{-1-r}{2}} e^{-u \frac{1+r^2+2rt}{(1-r)(1+r)}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{\frac{-1-r}{2}}^{1} \right]$$

$$> \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-r)(1+r)} e^{-u \frac{1}{1+r}} \int_{-1}^{\frac{-1-r}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$> \frac{1}{2\pi} e^{-u \frac{1}{1+r}} \frac{\arcsin\left(\frac{-1-r}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}{1-r} \to \infty \text{ bei } r \to 1.$$

Wir können also zu jedem beliebigen $G > 0$ ein r_0 finden, so daß $f(r_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu^2(u)\, r_0^{2\nu} > G + 1$ ist, und dann ein N, so daß für $n \geqq N$ gilt $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} L_\nu^2(u)\, r_0^{2\nu} < 1$ ist. Dann ist

$$L_0^2 + L_1^2 + \cdots + L_n^2 \geqq L_0^2 + L_1^2 r_0^2 + \cdots + L_n^2 r_0^{2n} > G,$$

womit (15.) bewiesen ist. — Weil für alle positiven $u \leqq U$ stets $L_n^2(u) \leqq e^U$ ist, so ist der Limes wieder gleichmäßig für alle u des Intervalles $0 \leqq u \leqq U$ [1]).

§ 2. Über ein mit den *Laguerre*schen Polynomen zusammenhängendes Orthogonalsystem.

Für die *Laguerre*schen Polynome $L_n(u)$ gilt [2])

$$(16.) \qquad \int_0^{\infty} e^{-u} L_m(u) L_n(u)\, du = \begin{cases} 0, & \text{für } m \neq n, \\ 1, & \text{für } m = n. \end{cases}$$

---

[1]) Durch genauere Durchführung der Rechnung, die zu (12.) führte, bin ich zu dem besseren Resultate gelangt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß für $n \geqq N$ und jedes $u > 0$ stets

$$\frac{L_0^2(u) + \cdots + L_n^2(u)}{n^{\frac{3}{4}}} < 4e^u + \varepsilon$$

ist. — Durch eine freundliche Mitteilung von Herrn *Szegö*-Berlin bin ich nachträglich auf eine Arbeit von Herrn *Perron* aufmerksam gemacht worden: „Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe", Archiv der Mathem. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 22 (1914), S. 329—340. In dieser Arbeit verallgemeinert Herr *Perron* das von Herrn *Fejér* (Asymptotikus értékek meghatározásáról. Mathematikai és természettudományi értesitö, 27 (1909)) gefundene Resultat (u fest > 0)

$$L_n(u) = \frac{u^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{u}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin\left\{2\sqrt{un} + \frac{\pi}{4}\right\}}{n^{\frac{1}{4}}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

auf beliebige (auch komplexe) u und nach anderer Richtung hin. Jedenfalls läßt sich aus dieser *Fejér*schen Formel unser obiges (12.) und auch $L_0^2(u) + \cdots + L_n^2(u) = O(n^{\frac{3}{4}})$ ableiten.

Weitere Literaturangaben über *Laguerre*sche Polynome findet man bei S. Wigert, Contributions à la théorie des polynomes *d'Abel-Laguerre* (Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik, Bd. 15, Nr. 25, 1921) und auf S. 204 des 4. Bandes der Mathem. Zeitschrift in einer Arbeit von Herrn *Hamburger*: Beiträge zur Konvergenztheorie der *Stieltjes*schen Kettenbrüche.

[2]) Vgl. *Laguerre*, Werke, Bd. I, S. 435—436.

Setzen wir

$$(17.)\qquad \varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{1+x}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}}\, L_n\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big) \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

so ist (φ) ein Orthogonalsystem; denn die $\varphi_n(x)$ sind für $-1 \leqq x \leqq +1$ stetig, (wenn unter $\varphi_n(-1)$ der rechtsseitige Limes, also 0, verstanden wird), und durch die Substitution $\frac{1-x}{1+x} = u$ geht $\int_{-1}^{+1} \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ gerade in (16.) über.

Unter Benutzung von (5.) ergibt sich für $\varphi_n(x)$ die Differentialgleichung

$$(18.)\quad \varphi_n''(x) - 2\,\frac{x^2+2x-1}{(1-x)\,(1+x)^2}\,\varphi_n'(x) - \frac{4n\,(1+x)+6x^2-x-1}{(1+x)^4\,(1-x)}\,\varphi_n(x) = 0.$$

Die $\varphi_n(x)$ gehören also nicht zu den *Sturm-Liouville*schen Funktionen; denn sonst müßte die Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d}{dx}\Big(P(x)\,\frac{dy}{dx}\Big) + (Q(x)+\lambda)\,y = 0$$

sein. Es ist also eine offene Frage, ob (φ) summabel von irgendeiner Ordnung ist oder nicht. Nach den Resultaten der *Blumenthal*schen Dissertation [1]) kann (φ) nicht von nullter Ordnung summabel sein, was l. c. bewiesen wird durch Angabe einer Funktion, deren zugeordnete Reihe divergiert. Wir wollen dieses Resultat, wenigstens für die Stelle 1, mit Hilfe des *Haar*schen Kriteriums (vgl. Einleitung) ableiten. Dazu braucht nur bewiesen zu werden, daß

$$(19.)\quad \varrho_n^{(0)}(1) = \int_{-1}^{+1} |\varphi_0(1)\,\varphi_0(x) + \varphi_1(1)\,\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(1)\,\varphi_n(x)|\,dx \to \infty$$

strebt. Zunächst gilt der

Hilfssatz. Ist $L_n(\xi)$ ein Extremum von $L_n(u)$, so ist stets

$$(20.)\qquad L_{n-1}(\xi) = L_n(\xi) = -\,L_{n+1}'(\xi).$$

Beweis: $L_{n-1}(\xi) = L_n(\xi)$ folgt sofort aus $(4_2.)$ und $L_n(\xi) = -\,L_{n+1}'(\xi)$ dann aus $(4_2.)$ und (3.).

Um (19.) zu beweisen, setzen wir $u = \frac{1-x}{1+x}$, dann ist (wegen $(4_1.)$)

$$\varrho_n^{(0)}(1) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1+u}\,|L_0(u)+L_1(u)+\cdots+L_n(u)|\,du = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1+u}\,|L_{n+1}'(u)|\,du$$

$$> \int_0^{1} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}\,|L_{n+1}'(u)|\,du.$$

(19.) ist also bewiesen, wenn wir zeigen, daß $\int_0^1 |L_n'(u)|\,du \to \infty$ bei $n \to \infty$ ist. —

Es seien die Stellen der Extrema von $L_n(u)$ im Intervall $0 \ldots 1$ der Reihe nach $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Dann ist

---

[1]) *O. Blumenthal*, Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{z-\xi}$, Diss. Göttingen 1898; vgl. daselbst S. 30—33.

$$\int_0^1 |L_n'(u)|\,du \geqq -\int_0^{\xi_1} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_2}^{\xi_3} \pm \cdots + (-1)^k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} L_n'(u)\,du$$
$$= 1 - 2L_n(\xi_1) + 2L_n(\xi_2) \mp \cdots + (-1)^{k-1} 2L_n(\xi_{k-1}) + (-1)^k L_n(\xi_k).$$

Aus (10.) folgt, daß die Anzahl der (stets positiven) Glieder der rechten Seite bei $n \to \infty$ von der Größenordnung $\sqrt{n}$ anwächst (denn die ξ_i liegen gerade zwischen den Wurzeln $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \ldots \lambda_{n,k+1}$). Nach (20.) ist $L_n(\xi_i) = -L_{n+1}'(\xi_i)$ und also wegen (6'.):

$$(n+1)L_n^2(\xi_i) = L_0^2(\xi_i) + L_1^2(\xi_i) + \cdots + L_n^2(\xi_i).$$

Wegen (15.) läßt sich, gleichzeitig für alle ξ_i, zu jedem $G > 0$ ein N so bestimmen, daß für $n \geqq N$ stets $|L_n(\xi_i)| > \frac{1}{\sqrt{n}} G$, und da die Anzahl der $L_n(\xi_i)$ von der Größenordnung $\sqrt{n}$ ist, so ist $\int_0^1 |L_n'(u)|\,du \to \infty$, also auch (19.) bewiesen.

Um nun die Summabilität 1. Ordnung zu untersuchen, betrachten wir analog

$$\varrho_n^{(1)}(1) = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{+1} |(n+1)\,\varphi_0(1)\,\varphi_0(x) + n\,\varphi_1(1)\,\varphi_1(x) + \cdots + 1 \cdot \varphi_n(1)\,\varphi_n(x)|\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1+u} |(n+1)L_0(u) + nL_1(u) + \cdots + L_n(u)|\,du$$
$$= \frac{1}{n+1}\int_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_1^\infty.$$

Der zweite Summand bleibt bei $n \to \infty$ endlich; denn nehmen wir $n-2$ statt n, so ist mit Rücksicht auf (7.), (5.) und (4_2.):

$$\frac{1}{n-1}\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1+u} |(n-1)L_0(u) + \cdots + L_{n-2}(u)|\,du = \frac{1}{n-1}\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1+u} \left|L_n''(u)\right| du$$
$$= \frac{1}{n-1}\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{(1+u)u} \left|\frac{n}{u}(L_n(u) - L_{n-1}(u)) + nL_{n-1}(u)\right| du$$
$$\leqq \frac{n}{n-1}\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{u(1+u)} \left[\left|\frac{L_n(u)}{u}\right| + \left|\frac{L_{n-1}(u)}{u}\right| + \left|L_{n-1}(u)\right|\right] du$$
$$< 2\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{u^2} 3 \cdot e^{\frac{u}{2}} du = 6.$$

Es kommt also darauf an, wie sich $\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1+u} |L_n''(u)|\,du$ verhält; und dies bleibt bei $n \to \infty$ beschränkt oder nicht, je nachdem ob dies bei $\frac{1}{n}\int_0^1 |L_n''(u)|\,du$ der Fall ist oder nicht. Sind $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ die zwischen 0 und 1 gelegenen Wurzeln von $L_n''(u) = 0$, so ist, wenn $O(1)$ wieder einen bei $n \to \infty$ endlich bleibenden Ausdruck bedeutet,

$$\frac{1}{n}\int_0^1 |L_n''(u)|\,du = \frac{1}{n}\left[-L_n'(0) + 2L_n'(\eta_1) \mp \cdots \pm 2L_n'(\eta_k)\right] + O(1).$$

Die Beantwortung unserer Frage ist somit darauf zurückgeführt, ob

$$S_n = \frac{1}{n}\left(L_n'(\eta_1) - L_n'(\eta_2) \pm \cdots \pm L_n'(\eta_k)\right)$$

beschränkt bleibt oder nicht; k wird wieder von der Größenordnung $\sqrt{n}$ unendlich. Wegen (5.) ist $(\eta_i - 1)\,L_n'(\eta_i) = n\,L_n(\eta_i)$ und also $S_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{|L_n(\eta_i)|}{1-\eta_i}$. Andererseits ist, wie aus (6'.), (3.) und (4_2.) elementar folgt:

$$\frac{L_0^2(\eta_i) + \cdots + L_n^2(\eta_i)}{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{\eta_i}{n}L_n'^2(\eta_i) + \frac{L_n^2(\eta_i)}{n+1} + \frac{n}{n+1}L_n(\eta_i)\,L_{n-1}(\eta_i).$$

Da aus $(\eta_i - 1)\,L_n'(\eta_i) = n\,L_n(\eta_i)$ und (4_2.) weiter $L_n(\eta_i) = (1-\eta_i)\,L_{n-1}(\eta_i)$ folgt, so ist

$$\frac{L_0^2(\eta_i) + \cdots + L_n^2(\eta_i)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\eta_i\frac{n^2}{(1-\eta_i)^2} + 1 + \frac{n}{1-\eta_i}\right)\cdot L_n^2(\eta_i)$$

oder

$$|L_n(\eta_i)| = \sqrt{\frac{L_0^2(\eta_i) + \cdots + L_1^2(\eta_i)}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\eta_i\frac{n}{(1-\eta_i)^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1-\eta_i}}}.$$

Mithin ist

$$S_n = \sum_{i=1}^{k}\left(\sqrt{\frac{L_0^2(\eta_i) + \cdots + L_n^2(\eta_i)}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n\cdot\eta_i^2 + \frac{(1-\eta_i)^2}{n} + 1 - \eta_i}}\right).$$

Ob dies bei $n \to \infty$ beschränkt bleibt oder nicht, habe ich nicht entscheiden können; jedenfalls wächst S_n höchstens wie $\log n$, da der erste Faktor des Summanden < 1 ist (bei $n \to \infty$ sogar gegen Null geht) und der zweite (mit Rücksicht auf Anmerkung 2 S. 47) $< \frac{8}{i+1}$ ist, und bekanntlich ist $\sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{1}{i} \sim \log\sqrt{n}$.

Wenn nun schon $\varrho_n^{(1)}(1)$, wenn überhaupt, höchstens wie $\log n$ unendlich wird, so werden wir vermuten, daß (vgl. Einleitung)

$$\varrho_n^{(2)}(1) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{+1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}(n+1-\nu)\,(n+2-\nu)\,\varphi_\nu(0)\,\varphi_\nu(x)\right|dx$$

endlich bleibt bei $n \to \infty$. Das soll nun bewiesen werden, d. h. unser *Laguerre*sches Orthogonalsystem (φ) ist, wenigstens an der Stelle 1, summabel 2. Ordnung.

Analog wie (7.) ergibt sich durch elementare Rechnung mit den zu Beginn von § 1 aufgestellten Formeln $\sum_{\nu=0}^{n}(n+1-\nu)\,(n+2-\nu)\,L_\nu(u) = -L_{n+3}'''(u)$. Es bleibt also $\varrho_n^{(2)}(1)$ endlich, wenn für alle n

$$\frac{1}{n^2}\int_0^1 |L_n'''(u)|\,du < G_1 \text{ und } \frac{1}{n^2}\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1+u}|L_n'''(u)|\,du < G_2$$

ist, wo G_1 und G_2 Konstanten sind. Das zweite folgt ganz ähnlich, wie oben durch-

geführt. Daß auch das erste Integral endlich bleibt, ergibt sich so: Sind $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ die Wurzeln von $L_n'''(u) = 0$ in $0 \ldots 1$, so ist

$$\frac{1}{n^2}\int_0^1 |L_n'''(u)|\,du = \frac{1}{n^2}[L_n''(0) - 2L_n''(\zeta_1) \pm \cdots \pm 2L_n''(\zeta_k)] + O(1).$$

Aus (5.) und (4_2.) folgt allgemein $L_n''(\zeta_i) = \frac{-n}{\zeta_i^2} L_n(\zeta_i) - \frac{\zeta_i - 1}{\zeta_i^2}\, n\, L_{n-1}(\zeta_i)$. Andererseits ergibt sich durch Differentiation von (5.): $L_n''(\zeta_i) = \frac{n-1}{\zeta_i - 2} L_n'(\zeta_i)$. Daraus errechnet man elementar:

$$L_n''(\zeta_i) = -\frac{n(n-1)}{n\,\zeta_i - 2} L_{n-1}(\zeta_i).$$

Da die ζ_i zwischen λ_i und λ_{i+3} liegen, so ist[1]) wegen (10'.) (Anm. 2, S. 47) und (11.):

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k} |L_n''(\zeta_i)| < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|n\,\zeta_i - 2|}\,|L_{n-1}(\zeta_i)| < C\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2} < C\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2},$$

wo C eine passend gewählte Konstante ist. Damit ist unsere Behauptung, d. h. die Summabilität 2. Ordnung bewiesen. (Vgl. Bemerkung am Schluß der Arbeit.)

Wenn bei den bekannten Orthogonalsystemen der trigonometrischen, der Kugel- und *Sturm-Liouville*schen Funktionen und jetzt auch bei dem *Laguerre*schen Orthogonalsystem die Summabilität endlicher Ordnung bewiesen ist, so erhebt sich die Frage nach einem Orthogonalsystem, welches von keiner noch so hohen Ordnung summabel ist. Ein solches System gibt es, wie nun gezeigt werden soll.

§ 3. Beispiel eines von keiner Ordnung summierbaren Orthogonalsystemes.

Setzen wir allgemein

$$K_n^{(0)}(s,t) = \varphi_0(s)\,\varphi_0(t) + \varphi_1(s)\,\varphi_1(t) + \cdots + \varphi_n(s)\,\varphi_n(t)$$

$$K_n^{(1)}(s,t) = \frac{K_0^{(0)}(s,t) + K_1^{(0)}(s,t) + \cdots + K_n^{(0)}(s,t)}{n+1}$$

. . . . . .

$$K_n^{(h)}(s,t) = \frac{K_0^{(h-1)}(s,t) + K_1^{(h-1)}(s,t) + \cdots + K_n^{(h-1)}(s,t)}{n+1} \quad \text{u. s. w.}$$

so ist nach dem *Haar*schen Resultate (l. c. S. 23) das System (φ) sicher nicht von h-ter Ordnung summabel, wenn

$$\limsup_{n=\infty} \int_a^b |K_n^{(h)}(s,t)|\,dt = \infty$$

ist. Es ist also speziell (φ) an der Stelle s_0 von keiner noch so hohen Ordnung summabel, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\int_a^b \varphi_n(t)\,dt > 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$
2. $\varphi_n(s_0) > 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$
3. $\varphi_0(s_0)\int_a^b \varphi_0(t)\,dt + \varphi_1(s_0)\int_a^b \varphi_1(t)\,dt + \cdots + \varphi_n(s_0)\int_a^b \varphi_n(t)\,dt + \cdots$

ist divergent.

[1]) Vor Sicherstellung der *Neumann*schen Formel für die λ_{ni} (l. c. S. 26) war unser Resultat nur unter einer ähnlichen Hypothese bewiesen.

Denn dann ist

$$\limsup_{n=\infty} \int_a^b K_n^{(0)}(s_0,t)\,dt = \infty \text{ und allgemein } \limsup_{n=\infty} \int_a^b K_n^{(h)}(s_0,t)\,dt = \infty,$$

da eine divergente Reihe mit lauter positiven Gliedern von keiner Ordnung summierbar ist.

Wir wollen nun ein spezielles Orthogonalsystem aufbauen, bei welchem wir dann die Eigenschaften 1., 2., 3. nachweisen werden. Das Intervall sei $0 \ldots 1$. Der Grundgedanke ist folgender: die $\varphi_n(t)$ werden durch aneinanderhängende geradlinige Streckenzüge zusammengesetzt (sind also stetig) u. zw. sind auf der t-Achse, teils nach oben, teils nach unten eine Anzahl Dächer aufgesetzt. s_0 ist eine Stelle, über der nach oben lauter Dachspitzen liegen (also $\varphi_n(s_0) > 0$); die Höhe des zu s_0 gehörigen Daches wird mit wachsendem n sehr rasch steigen (wobei natürlich die Basis dann sehr rasch abnehmen muß). Die andern Dächer werden längst nicht so steil sein und so reguliert werden, daß neben den Orthogonalitätsbedingungen auch 1. erfüllt wird. Die Divergenz 3. wird erzielt durch hinreichend schnelles Wachsen der $\varphi_0(s_0), \varphi_1(s_0), \ldots \varphi_n(s_0)$, obwohl mit wachsendem n die $\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt \to 0$ streben.

Im folgenden sollen $\delta_0, \delta_1, \ldots, i_0, i_1, \ldots$ gleichzeitig Intervalle und auch die Länge derselben bedeuten (was jeweils gemeint ist, ergibt sich aus dem Zusamhang). C_n und δ_n seien zunächst noch beliebige positive Zahlen, für die nur stets

$$C_n^2\,\delta_n = 1 \text{ und } C_n \geqq 2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{21.}$$

gelten soll. Ferner sei $D_k(t)$ eine Funktion, die durch ein auf das Intervall i_k aufgesetztes (oder darunter gehängtes) gleichschenkliges Dreieck bestimmt ist. Die Intervalle δ_k sollen alle bei 0 beginnen, können also wegen (21.) höchstens bis $\frac{1}{4}$ reichen. Die Strecke $\frac{1}{4} \ldots 1$ wird in 3 gleiche Teile geteilt, deren mittelsten wir i_0 nennen. Die beiden anderen Drittel (der Strecke $\frac{1}{4} \ldots 1$) dritteilen wir ebenso und nennen die beiden Mittelstücke beide Male i_1. Die noch nicht benannten Stücke (der Strecke $\frac{1}{4} \ldots 1$) werden wieder in 3 gleiche Teile geteilt und die 4 Mittelstücke dieser Dritteilungen je mit i_2 bezeichnet; und so geht es weiter. So erhalten wir ein System von sich nicht überdeckenden Teilintervallen, nämlich ein i_0, zwei i_1, vier i_2, allgemein 2^n Intervalle i_n. Dabei ist

$$i_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}. \tag{22.}$$

Nun definieren wir die $\varphi_n(t)$ folgendermaßen:

$$\varphi_0(t) = C_0 \frac{\delta_0 - t}{\delta_0} \text{ in } \delta_0;\ \varphi_0 = D_0^{(0)}(t) \text{ in } i_0;\ \varphi_0 = 0 \text{ sonst.}$$

Dabei wird $D_0^{(0)}(t)$ so gewählt, daß die Normierungsforderung $\int_0^1 \varphi_0^2(t)\,dt = 1$ erfüllt ist. Da stets (wegen (21.))

$$\int_{(\delta_n)} \left(C_n \frac{\delta_n - t}{\delta_n}\right)^2 dt = \frac{1}{3}$$

ist, bestimmt sich also $D_0^{(0)}(t)$ aus

$$\int_{(i_0)} D_0^{(0)}(t)^2 \, dt = \frac{2}{3}.$$

Ferner sei

$\varphi_1(t) = C_1 \frac{\delta_1 - t}{\delta_1}$ in δ_1; $\varphi_1 = D_0^{(1)}(t)$ in i_0; $\varphi_1 = D_1^{(1)}(t)$ in den beiden i_1; $\varphi_1 = 0$ sonst.

Dabei ist zunächst $D_0^{(1)}(t)$ so gewählt, daß die Orthogonalitätsbedingung $\int_0^1 \varphi_0 \varphi_1 \, dt = 0$ befriedigt wird; d. h., wenn wir $\delta_1 \leqq \delta_0$ annehmen (wie es hernach wirklich sein wird), daß

$$\int_{(i_0)} D_0^{(0)}(t) \, D_0^{(1)}(t) \, dt = - \int_{(\delta_1)} C_1 \frac{\delta_1 - t}{\delta_1} \cdot C_0 \frac{\delta_0 - t}{\delta_0} \, dt.$$

Sodann werden die beiden Funktionen $D_1^{(1)}(t)$, die in entsprechenden Punkten der beiden Intervalle i_1 gleiche Werte haben sollen [1]), so bestimmt, daß $\int_0^1 \varphi_1^2(t) \, dt = 1$ wird, also aus

$$2 \cdot \int_{(i_1)} D_1^{(1)}(t)^2 \, dt = \frac{2}{3} - \int_{(i_0)} D_0^{(1)}(t)^2 \, dt.$$

Der Bau unseres Funktionensystems wird hinreichend deutlich sein, wenn wir noch $\varphi_2(t)$ beschreiben:

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= C_2 \frac{\delta_2 - t}{\delta_2} \text{ in } \delta_2 \quad [\delta_2 < \delta_1 < \delta_0] \\ &= D_0^{(2)}(t) \quad \text{in dem einen Intervall } i_0 \\ &= D_1^{(2)}(t) \quad \text{in den beiden Intervallen } i_1 \\ &= D_2^{(2)}(t) \quad \text{in den } 2^2 \text{ Intervallen } i_2 \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Dabei wird zunächst $D_0^{(2)}(t)$ so bestimmt, daß $\int_0^1 \varphi_0(t) \, \varphi_2(t) \, dt = 0$, d. h. (da $\varphi_0 = 0$ in i_1 und i_2 ist) so, daß

$$\int_{(i_0)} D_0^{(0)}(t) \, D_0^{(2)}(t) \, dt = - \int_{(\delta_2)} C_2 \frac{\delta_2 - t}{\delta_2} \, C_0 \frac{\delta_0 - t}{\delta_0} \, dt.$$

Dann wird $D_1^{(2)}(t)$ so bestimmt, daß $\int_0^1 \varphi_1(t) \, \varphi_2(t) \, dt = 0$ wird, d. h. aus

$$2 \int_{(i_1)} D_1^{(1)}(t) \, D_1^{(2)}(t) \, dt = - \int_{(\delta_2)} C_2 \frac{\delta_2 - t}{\delta_2} \, C_1 \frac{\delta_1 - t}{\delta_1} \, dt - \int_{(i_0)} D_0^{(1)}(t) \, D_0^{(2)}(t) \, dt.$$

Endlich wird $D_2^{(2)}(t)$ so bestimmt, daß $\int_0^1 \varphi_2^2(t) \, dt = 1$ wird, d. h. aus

---

[1]) D. h. über den beiden Intervallen stehen bzw. hängen zwei kongruente und gleichgerichtete gleichschenklige Dreiecke; und analog bei den 2^n Intervallen i_n.

$$4\int_{(i_1)} D_2^{(2)}(t)^2\,dt = \frac{2}{3} - \int_{(i_0)} D_0^{(2)}(t)^2\,dt - 2\int_{(i_1)} D_1^{(2)}(t)^2\,dt.$$

Damit dürfte das formale Bildungsgesetz der $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ hinreichend deutlich sein, und der Raumersparnis wegen unterdrücke ich hier die allgemeine Definition von φ_n. Man sieht auch leicht, daß die $D_k^{(i)}(t)$ eindeutig bestimmt sind bis auf eine Kleinigkeit; da allgemein in seiner Definitionsgleichung $D_n^{(n)}$ nur im Quadrat vorkommt, so können wir dies nach Belieben positiv oder negativ wählen, d. h. das erste auf den i_n errichtete Dach kann auf i_n stehen oder daran hängen; wir wählen stets das erstere. Dann ergibt sich folgendes Gesamtbild: Am Anfang des Intervalles $0 \ldots 1$ stehen lauter Halbdächer, deren Spitzen immer höher werden (allgemein C_n), während die Basen δ_n immer kleiner werden; bis $\frac{1}{4}$ verläuft φ_n dann auf der t-Achse ($\varphi_n = 0$); auf jedem der 2^n Intervalle i_n steht dann genau ein gleichschenkliges Dreieck ($\varphi_n = D_n^{(n)}(t) > 0$), während unendlich viele, die immer flacher werden, darunter hängen ($\varphi_{n+\nu} = D_n^{(n+\nu)}(t) < 0$, aber $\varphi_0 = \varphi_1 = \cdots = \varphi_{n-1} = 0$ in i_n). Es erübrigt nur noch, die im wesentlichen willkürlichen C_n und δ_n so festzulegen, daß die Bedingungen 1., 2., 3. erfüllt sind. Wir wählen $s_0 = 1$, dann ist 2. eo ipso erfüllt. Ich behaupte, daß auch 1. und 3. gilt, wenn

$$(23.) \qquad C_0 = 2;\ C_n = 6\,n\,2^n \cdot C_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt wird. Bevor wir dies nachweisen, muß noch eine andre Frage erledigt werden: sind die $\varphi_n(t)$ wirklich sämtlich reell? Die allgemeine Definitionsgleichung für $D_n^{(n)}$ lautet nämlich

$$(24.) \quad 2^n\int_{(i_n)} D_n^{(n)}(t)^2\,dt = \frac{2}{3} - \int_{(i_0)} D_0^{(n)}(t)^2\,dt - 2\int_{(i_1)} D_1^{(n)}(t)^2\,dt - 2^2\int_{(i_2)} D_2^{(n)}(t)^2\,dt - \cdots - 2^{n-1}\int_{(i_{n-1})} D_{n-1}^{(n)}(t)^2\,dt,$$

und da wäre es doch denkbar, daß die rechte Seite negativ wird; denn die rechts auftretenden $D^{(n)}$ wurden aus den Orthogonalitätsbedingungen vorher in ganz bestimmter Weise festgelegt.

Wir müssen also noch folgende 3 Behauptungen beweisen:

I. Die rechte Seite von (24.) ist positiv,

II. Für jedes n ist $\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt > 0$,

III. Die Reihe $\varphi_0(0)\int_0^1 \varphi_0(t)\,dt + \varphi_1(0)\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt + \cdots + \varphi_n(0)\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt + \cdots$ divergiert.

Zur Erleichterung der Rechnung stelle ich drei (an sich triviale) Hilfssätze voran. Unter einer Dachfunktion D über i soll eine (lineare) Funktion verstanden werden, die ein über i als Basis errichtetes gleichschenkliges Dreieck darstellt.

Hilfssatz 1. Es sei $D(t)$ eine Dachfunktion über i und es werde

$$\int_{(i)} D^2(t)\,dt = q \text{ und } \int_{(i)} D(t)\,dt = J \tag{25.}$$

gesetzt; dann ist

$$J = \sqrt{\frac{3}{4} q \cdot i}. \tag{26.}$$

Beweis: O. B. d. A. sei $0 \ldots i$ das Intervall i. Ist dann h die Höhe des Dreiecks, so ist einerseits $q = 2\int_0^{\frac{i}{2}} \left(\frac{2h}{i} t\right)^2 dt = \frac{1}{3} h^2 \cdot i$ andererseits $J = \frac{1}{2} h \cdot i$, also (26.) bewiesen.

Hilfssatz 2. Sind $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ zwei Dachfunktionen über i, so ist

$$p_{1,2} = \int_{(i)} D^{(1)}(t)\, D^{(2)}(t)\,dt = \sqrt{q^{(1)} q^{(2)}}. \tag{27.}$$

Beweis: Es sei wieder i das Intervall $0 \ldots i$; dann ist

$$p_{1,2} = 2\int_0^{\frac{i}{2}} \left(\frac{2 h_1 t}{i}\right) \cdot \left(\frac{2 h_2 t}{i}\right) dt = \frac{1}{3}\, h_1 \cdot h_2\, i = \sqrt{q^{(1)}} \cdot \sqrt{q^{(2)}}.$$

Hilfssatz 3. Es sei $\varkappa > \lambda$ und $\varphi_\varkappa(t)$, $\varphi_\lambda(t)$ zwei der oben konstruierten Funktionen; dann ist

$$\int_0^{\delta_\varkappa} \varphi_\varkappa(t)\, \varphi_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{2}\frac{C_\lambda}{C_\varkappa} - \frac{1}{6}\left(\frac{C_\lambda}{C_\varkappa}\right)^3. \tag{28.}$$

Beweis: Wegen $C_n^2\, \delta_n = 1$ ist

$$\int_0^{\delta_\varkappa} \varphi_\varkappa\, \varphi_\lambda\,dt = \frac{C_\varkappa C_\lambda}{\delta_\varkappa \delta_\lambda} \int_0^{\delta_\varkappa} (\delta_\varkappa - t)(\delta_\lambda - t)\,dt = \frac{C_\varkappa C_\lambda}{\delta_\varkappa \delta_\lambda}\left(\frac{\delta_\varkappa^2 \delta_\lambda}{2} - \frac{1}{6}\delta_\varkappa^3\right)$$

$$= C_\varkappa C_\lambda^3 \left(\frac{1}{2 C_\varkappa^2 C_\lambda^2} - \frac{1}{6 C_\varkappa^4}\right),$$

d. h. (28.).

Es ist I. bewiesen, wenn wir zeigen, daß $2^k \int_{(i_k)} D_k^{(n)}(t)^2\,dt = 2^k\, q_k^{(n)} < \frac{1}{6}\frac{1}{2^n}$ ist für alle n und alle $k < n$; denn dann ist die rechte Seite von (24.) größer als $\frac{1}{3}$. Um nun (für $n > 0$)

$$2^k\, q_k^{(n)} < \frac{1}{6}\frac{1}{2^n}\ (k = 0, 1, \ldots n-1) \tag{29.}$$

zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß (29.) gilt für $k = 0$ und beliebiges n, und schließen dann weiter durch Induktion. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 3 ist wegen

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\, \varphi_0(t)\,dt = 0$$

$$-\int_{(i_n)} D_0^{(0)}(t)\, D_0^{(n)}(t)\,dt = \int_{(\delta_n)} \varphi_0(t)\, \varphi_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\frac{C_0}{C_n} - \frac{1}{6}\left(\frac{C_0}{C_n}\right)^3 < \frac{1}{2}\frac{C_0}{C_n},$$

also nach Hilfssatz 2 und wegen (23.)

$$q_0^{(0)} \cdot q_0^{(n)} = \frac{2}{3} \cdot q_0^{(n)} < \frac{1}{4}\frac{C_0^2}{C_n^2} \leqq \frac{1}{4}\frac{C_{n-1}^2}{C_n^2} < \frac{1}{4}\frac{C_{n-1}}{C_n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6n\,2^n},$$

woraus (29.) für $k = 0$ und beliebiges $n \geqq 1$ folgt.

Nun sei (29.) richtig für $m = 1, 2, \ldots n-1$ jedesmal mit $k = 0, 1, \ldots, m-1$ und für $m = n$ mit $k = 0, 1, \ldots \lambda - 1$. Wir wollen zeigen, daß (29.) dann auch für $m = n$ und $k = \lambda$ $(\lambda < n)$ gilt. Damit ist (29.) allgemein und also auch I. bewiesen. — Aus $\int_0^1 \varphi_n(t)\,\varphi_\lambda(t)\,dt = 0$ folgt:

$$-2^\lambda \int_{(i_\lambda)} D_\lambda^{(n)}(t) \cdot D_\lambda^{(\lambda)}(t)\,dt = \int_{(\delta_n)} \varphi_n(t)\,\varphi_\lambda(t)\,dt + 1 \int_{(i_0)} D_0^{(n)}\,D_0^{(\lambda)}\,dt + \cdots$$
$$+ 2^\nu \int_{(i_\nu)} D^{(n)}\,D_\nu^{(\lambda)}\,dt + \cdots + 2^{\lambda-1} \int_{(i_{\lambda-1})} D_{\lambda-1}^{(n)}\,D_{\lambda-1}^{(\lambda)}\,dt.$$

Also

$$-2^\lambda \sqrt{q_\lambda^{(n)}\,q_\lambda^{(\lambda)}} = \frac{1}{2}\frac{C_\lambda}{C_k} - \frac{1}{6}\left(\frac{C_\lambda}{C_k}\right)^3 + \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} 2^\nu \sqrt{q_\nu^{(n)}\,q_\nu^{(\lambda)}}.$$

Nach unserer Hypothese stehen rechts nur solche q, für welche (29.) gilt; mithin ist allgemein $2^\nu \sqrt{q_\nu^{(n)}\,q_\lambda^{(\lambda)}} < \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^\lambda}}$. Ferner ist wegen (23.) stets $\frac{C_\lambda}{C_k} \leqq \frac{1}{6n\,2^n}$; also

$$2^\lambda\,q_\lambda^{(n)} \cdot 2^\lambda\,q_\lambda^{(\lambda)} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6n\,2^n} + \frac{\lambda}{6}\sqrt{\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^\lambda}}\right)^2 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2n\sqrt{2^n}} + \lambda \cdot \sqrt{\frac{1}{2^\lambda}}\right)^2$$

Ersetzen wir in (24.) n durch λ, so stehen rechts lauter Glieder, für welche nach Annahme (29.) gilt; d. h. es ist $2^\lambda\,q_\lambda^{(\lambda)} > \frac{1}{3}$; also ist

$$2^\lambda\,q_\lambda^{(n)} < \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2n\sqrt{2^n}} + \lambda \cdot \sqrt{\frac{1}{2^\lambda}}\right)^2.$$

Hierin ist das rechtsstehende Quadrat sicher kleiner als 2, da in der Hypothese $n \geqq 2$ und stets $\frac{\lambda^2}{2^\lambda} \leqq \frac{9}{8}$ ist; d. h. es gilt (29.) auch für $m = n$ und $k = \lambda$, und die Realität der $\varphi_n(t)$ ist erwiesen.

II. ergibt sich so: mit Rücksicht auf Hilfssatz 1 ist (für $n \geqq 1$) [1])

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt = \int_{(\delta_n)} \varphi_n(t)\,dt + 2^n \int_{(i_n)} D_n^{(n)}(t)\,dt + \sum_{\nu=0}^{n-1} 2^\nu \int_{(i_\nu)} D_\nu^{(n)}(t)\,dt$$
$$= \int_{(\delta_n)} \varphi_n(t)\,dt + 2^n \sqrt{\frac{3}{4}\,q_n^{(n)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}} - \sum_{\nu=0}^{n-1} 2^\nu \sqrt{\frac{3}{4}\,q_\nu^{(n)} \cdot \frac{1}{4}\,\frac{1}{3^{\nu+1}}},$$

(denn die Integranden unter der Summe sind alle negativ); ferner ist wegen (24.) und (29.) stets $2^n\,q_n^{(n)} > \frac{1}{3}$ und also, wenn das (positive) $\int_{(\delta_n)}$ unberücksichtigt bleibt:

---

[1]) Für $n = 1$ reduziert sich $\sum_{\nu=0}^{n-1}$ auf das eine Glied $\int_{i_0} D_0^{(1)}(t)\,dt$. Für $n = 0$ ist die II. trivial.

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\,dt > \sqrt{\frac{3}{4}\cdot 2^n\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^n}} - \sum_{\nu=0}^{n-1}\sqrt{\frac{3}{4}2^\nu\cdot\frac{1}{6}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^{\nu+1}}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{\frac{1}{96}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}\right).$$

Die Klammer der rechten Seite ist für $n \geqq 2$ stets positiv; denn für $n = 1$ und $n = 2$ ist dies, wie man sofort verifiziert, der Fall; für $n \geqq 3$ aber ist

$$\sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{\frac{1}{96}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}} > \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}\right) > 0,$$

wie man wieder leicht ausrechnet. Damit ist II. bewiesen.

Um nun noch III., also die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(0)\int_0^1\varphi_n(t)\,dt$ nachzuweisen, beachten wir $\varphi_n(0) = C_n$; dann ist, mit Rücksicht auf die obige Abschätzung

$$C_n\cdot\int_0^1\varphi_n(t)\,dt > C_n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{\frac{1}{96}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}\right).$$

Bei $n \to \infty$ geht der letzte Faktor $\to \sqrt{\frac{3}{16}}$; ferner ist $C_n > 2^n$ (vgl. (23.)), also wächst der Ausdruck rechts bei $n \to \infty$ über alle Grenzen, womit die Divergenz (und also alles) bewiesen ist.

Zum Schluß sei bemerkt, daß es natürlich unwesentlich ist, die Stelle s_0 (wie hier geschehen) in den einen Endpunkt des Intervalles zu verlegen. Man erhält sofort für das Intervall $-1 \ldots +1$ ein nicht summierbares Orthogonalsystem, bei dem jene Stelle im Innern liegt, wenn man die eben beschriebenen Funktionen an der Ordinatenachse spiegelt und mit $\sqrt{2}$ dividiert. Es würde auch leicht sein, mit diesem Verfahren ein System (φ) zu konstruieren, das an beliebig vorgegebenen Stellen (in endlicher Anzahl) des Intervalles von keiner noch so hohen Ordnung summabel ist.

Nachträgliche Bemerkung zu S. 50: Zufolge der Anm. 1, S. 50 ergibt sich, daß $\varrho_n^{(1)}(1)$ endlich bleibt. — Ich habe weiterhin festgestellt, daß an einer beliebigen Stelle des Intervalles Summabilität mindestens 2. Ordnung gilt, worauf ich noch weiter zurückkommen werde.

Bemerkung zu Herrn *A. Fraenkel's* Aufsatz „Die Berechnung des Osterfestes".

Von Herrn *Karl Boecklen* in Chicago.

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß die von Herrn *Fraenkel*[1]) hergeleiteten Regeln zur Berechnung des Osterfestes mit den bekannten Formeln von *Gauß* übereinstimmen.

Zur Vereinfachung der Schreibung setzen wir:

$\mathfrak{g}[Z] : Y =$ der ganzen Zahl, die die Teilung von Z durch Y ergibt, ohne Rücksicht auf einen etwa verbleibenden Rest;

$\mathfrak{r}[Z] : Y =$ dem bei der Teilung von Z durch Y übrigbleibenden Rest:

$$= 0, 1, 2, \ldots (Y - 1).$$

Man hat somit die Beziehung:

$$Z = Y \,.\, \mathfrak{g}[Z] : Y + \mathfrak{r}[Z] : Y.$$

Ist A die Jahreszahl des in Frage kommenden Jahres, so sind die von *Fraenkel* gegebenen Regeln für die Berechnung des *julianischen Osterfestes* (a. a. O. S. 140):

$$\begin{aligned} a &= \mathfrak{r}[7\,A + 8] : 19, \\ b &= \mathfrak{r}[A] : 4, \\ c &= a + \mathfrak{g}[11\,a + 7] : 19, \\ d &= \mathfrak{r}[4\,A + 2\,b + c + 6] : 7, \\ &\text{Ostern} = \text{März } (50 - c + d). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Formeln von *Gauß* lauten:

$$\begin{aligned} a' &= \mathfrak{r}[A] : 19, \\ b' &= \mathfrak{r}[A] : 4, \\ c' &= \mathfrak{r}[A] : 7, \\ d' &= \mathfrak{r}[19\,a' + M] : 30, \; M = 15, \\ e' &= \mathfrak{r}[2\,b' + 4\,c' + 6\,d' + N] : 7, \; N = 6, \\ &\text{Ostern} = \text{März } (22 + d' + e'). \end{aligned}$$

Es möge hier vorweg bemerkt werden, daß $b = b'$.

Da $A = 19\,\mathfrak{g}[A] : 19 + a'$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a &= \mathfrak{r}[7\,a' + 8] : 19 \\ &= 18 - \mathfrak{r}[12\,a' + 10] : 19 \\ &= -12\,a' + 8 + 19 \,.\, \mathfrak{g}[12\,a' + 10] : 19, \end{aligned}$$

[1]) Dieses Journ. Bd. 138, S. 133 ff.

somit

$$11\,a + 7 = -\,133\,a' + 95 + 209\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,a' + 10] : 19 + a'.$$

Nun ist aber $0 \leqq a' \leqq 18$, folglich

$$\mathfrak{g}\,[11\,a + 7] : 19 = -\,7\,a' + 5 + 11\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,a' + 10] : 19$$

und

$$c = -\,19\,a' + 13 + 30\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,a' + 10] : 19$$

oder

$$28 - c = 19\,a' + 15 - 30\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,a' + 10] : 19.$$

Es sei nun:

$$\xi = 30.\,\mathfrak{r}\,[12\,a' + 10] : 19 = \mathfrak{r}\,[360\,a' + 300] : 570,$$
$$\eta = 19.\,\mathfrak{r}\,[19\,a' + 15] : 30 = \mathfrak{r}\,[361\,a' + 285] : 570,$$

so daß

$$\min\,\xi = 0, \quad \max\,\xi = 30\,(19 - 1) = 540,$$
$$\min\,\eta = 0, \quad \max\,\eta = 19\,(30 - 1) = 551.$$

Man kann aber auch schreiben:

$$\xi = 360\,a' + 300 - 570\,x,$$
$$\eta = 361\,a' + 285 - 570\,y,$$

worin die ganzen Zahlen x und y dadurch bestimmt sind, daß ξ und η weder < 0 noch > 569 sein sollen.

Es sind zwei Fälle zu betrachten:

1.) $0 \leqq a' \leqq 15$. Alsdann hat man

$$\xi = \eta - a' + 15 - 570\,(x - y).$$

Da aber $(\eta - a' + 15)$ weder negativ werden, noch $551 + 15 = 566$ überschreiten kann, so muß sein:

$$x - y = 0.$$

2.) $15 \leqq a' \leqq 18$. In diesem Falle hat man

$$\eta = \xi + a' - 15 - 570\,(y - x).$$

Die Grenzen von $(\xi + a' - 15)$ sind 0 und $540 + 3 = 543$, folglich

$$y - x = 0.$$

(Die letztere Beziehung gilt offenbar für alle Werte $a' < 45$).

Da

$$\mathfrak{r}\,[12\,a' + 10] : 19 = 12\,a' + 10 - 19\,x,$$
$$\mathfrak{r}\,[19\,a' + 15] : 30 = 19\,a' + 15 - 30\,y,$$

so ist

$$x = \mathfrak{g}\,[12\,a' + 10] : 19,$$
$$y = \mathfrak{g}\,[19\,a' + 15] : 30,$$

und daher für alle in Betracht kommenden Werte a':

$$\mathfrak{g}\,[12\,a' + 10] : 19 = \mathfrak{g}\,[19\,a' + 15] : 30,$$

somit

$$28 - c = 19\,a' + 15 - 30\,.\,\mathfrak{g}\,[19\,a' + 15] : 30$$
$$= \mathfrak{r}\,[19\,a' + 15] : 30 = d'$$

oder

$$c = 28 - d'.$$

Man hat ferner

$$4\,A = 28\,.\,\mathfrak{g}\,[A] : 7 + 4\,c',$$

folglich

$$d = \mathfrak{r}\,[4\,c' + 2\,b' - d' + 6] : 7$$

oder

$$d = \mathfrak{r}\,[2\,b' + 4\,c' + 6\,d' + 6] : 7 = e',$$

und schließlich

$$\text{März}\ (50 - c + d) = \text{März}\ (22 + d' + e').$$

Für die Berechnung des *gregorianischen Osterfestes* gibt *Fraenkel* folgende Regel (a. a. O. S. 145 f.):

$$a = \mathfrak{r}\,[12\,(A + K + 1)] : 19,$$
$$b = \mathfrak{r}\,[A] : 4,$$
$$c = a + \mathfrak{g}\,[11\,a + K] : 19,$$
$$d = \mathfrak{r}\,[4\,A + 2b + 6c + N] : 7,$$
$$\text{Ostern} = \text{März}\ (22 + c + d).$$

Hierin ist

$K = \mathfrak{r}\,[19\,(k - p - q) + 3] : 30,$
$N = \mathfrak{r}\,[k - q + 4] : 7,$
$k =$ der Jahrhundertzahl, d. h. der Zahl, die übrigbleibt, nachdem man von A die beiden letzten Ziffern abgetrennt hat,
$p = \mathfrak{g}\,[8\,k + 13) : 25,$
$q = \mathfrak{g}\,[k] : 4.$

Die *Gauß*schen Formeln für das gregorianische Osterfest unterscheiden sich von denen für das julianische nur dadurch, daß

$$M = \mathfrak{r}\,[k - p - q + 15] : 30,$$
$$N = \mathfrak{r}\,[k - q + 4] : 7$$

an Stelle der unveränderlichen Werte $M = 15$ und $N = 6$ treten.

Auch hier ist $b = b'$, ferner bezeichnet N bei *Fraenkel* und *Gauß* dieselbe Größe.

In der Formel für a kann wie oben A durch a' ersetzt werden. Wir setzen ferner zur Abkürzung

$$\beta = a' + K,$$

so daß

$$\min \beta = 0, \quad \max \beta = 18 + 29 = 47.$$

Damit wird

$$a = \mathfrak{r}\,[12\,\beta + 12] : 19$$
$$= 12\,\beta + 12 - 19\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,\beta + 12] : 19,$$

somit

$$11\,a + K = 133\,\beta + 114 - 209\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,\beta + 12] : 19 + 18 - a'.$$

Es ist aber $0 \leqq 18 - a' \leqq 18$, folglich:

$$\mathfrak{g}\,[11\,a + K] : 19 = 7\,\beta + 6 - 11\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,\beta + 12] : 19$$

und

$$c = 19\,\beta + 18 - 30\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,\beta + 12] : 19.$$

Es kommen zwei Fälle in Betracht:

1.) $$0 \leqq \beta \leqq 18.$$

Wir setzen:

$$\zeta = 30\,\mathfrak{r}\,[12\,\beta + 12] : 19 = \mathfrak{r}\,[360\,\beta + 360] : 570,$$
$$\eta = 19\,\mathfrak{r}\,[19\,\beta + 18] : 30 = \mathfrak{r}\,[361\,\beta + 342] : 570,$$

so daß

$$\min \eta = 0, \quad \max \eta = 551.$$

Andererseits ist

$$\xi = 360\,\beta + 360 - 370\,x,$$
$$\eta = 361\,\beta + 342 - 570\,y,$$

worin die ganzen Zahlen x und y so zu wählen sind, daß ξ und η weder negativ werden, noch 569 überschreiten. Sodann hat man

$$\xi = \eta - \beta + 18 - 570\,(x - y).$$

Die Grenzen von $(\eta - \beta + 18)$ sind 0 und $551 + 18 = 569$, somit

$$x - y = 0.$$

Nun ist

$$x = \mathfrak{g}\,[12\,\beta + 12] : 19,$$
$$y = \mathfrak{g}\,[19\,\beta + 18] : 30,$$

so daß man erhält

$$c = 19\,\beta + 18 - 30\,.\,\mathfrak{g}\,[19\,\beta + 18] : 30 = \mathfrak{r}\,[19\,\beta + 18] : 30.$$

2.) $18 \leqq \beta \leqq 47$. Wir führen ein:

$$\beta_1 = \beta - 18,$$

folglich $0 \leq \beta, \leqq 29$. Damit wird

$$c = 19\,\beta_1 + 360 - 30\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,\beta_1 + 228] : 19 = 19\,\beta_1 - 30\,.\,\mathfrak{g}\,[12\,\beta_1\,] : 19.$$

Es sei

$$\xi_1 = 30\,.\,\mathfrak{r}\,[12\,\beta_1] : 19 = \mathfrak{r}\,[360\,\beta_1] : 570,$$
$$\eta_1 = 19\,.\,\mathfrak{r}\,[19\,\beta_1] : 30 = \mathfrak{r}\,[361\,\beta_1] : 570,$$

und zwar hat man

$$\min \xi_1 = 0, \quad \max \xi_1 = 540.$$

Weil aber auch

$$\xi = 360\,\beta_1 - 570\,x_1,$$
$$\eta = 361\,\beta_1 - 570\,y_1,$$

wo für x_1 und y_1 das oben bezüglich x und y Gesagte gilt, so erhält man

$$\eta_1 = \xi_1 + \beta_1 - 570\,(y_1 - x_1).$$

Da $\xi_1 + \beta_1$ aber nicht < 0 noch $> (540 + 29 = 569)$ werden kann, so muß sein:

$$y_1 - x_1 = 0$$

oder

$$\mathfrak{g}\,[12\,\beta_1] : 19 = \mathfrak{g}\,[19\,\beta_1] : 30,$$

folglich

$$\begin{aligned} c &= 19\,\beta_1 - 30\,.\,\mathfrak{g}\,[19\,\beta_1] : 30 \\ &= \mathfrak{r}\,[19\,\beta_1] : 30 \\ &= \mathfrak{r}\,[19\,\beta - 342] : 30 \\ &= \mathfrak{r}\,[19\,\beta + 18] : 30. \end{aligned}$$

Man hat somit für alle in Betracht kommenden Werte von a' und K:

$$c = \mathfrak{r}\,[19\,a' + 19\,K + 18] : 30.$$

Nun ist

$$K = \mathfrak{r}\,[19\,(k - p - q + 15) + 18] : 30 = \mathfrak{r}\,[19\,M + 18] : 30,$$

somit

$$c = \mathfrak{r}\,[19\,a' + 361\,M + 360] : 30 = \mathfrak{r}\,[19\,a' + M] : 30 = d'.$$

In der Formel für d kann aber $4\,A$ durch $4\,c'$ und $6c$ durch $6d'$ ersetzt werden, so daß sich ergibt:

$$d = e'.$$

Man hat demnach

$$\text{März } (22 + c + d) = \text{März } (22 + d' + e').$$

Es sind nun noch die beiden Ausnahmen zu betrachten. Die erste Ausnahme ist gleichlautend dahingehend, daß stets Ostern = April 19 zu setzen ist, wenn die Rechnung April 26 ergibt.

Die zweite Ausnahme lautet bei *Gauß*: Ostern ist April 18 anstatt April 25 zu feiern, wenn $d' = 28$ und $a' > 10$. Aus der Beziehung

$$d' = \mathfrak{r}\,[19\,a' + M] : 30$$

erhält man aber

$$a' = \mathfrak{r}\,[11\,M + 19\,d'] : 30.$$

Für $d' = 28$ soll also sein:

$$\mathfrak{r}\,[11\,M + 22] : 30 = 11, 12, 13 \ldots 18.$$

Fraenkel gibt als Bedingung $c = 28$ und $K > 21$, d. h.

$$\mathfrak{r}\,[19\,M + 18] : 30 = 22, 23, 24 \ldots 29$$

oder

$$\mathfrak{r}\,[11\,M + 11] : 30 = 7, 6, 5 \ldots 0,$$

was gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{r}[11\,M + 22] : 30 = 18, 17, 16 \ldots 11.$$

Die Bedingungen für die zweite Ausnahme stimmen also miteinander überein.

Über die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der ebenen Dreiecke mit reellen Seiten.

Von Herrn *Hermann Wolff* in Berlin.

In seiner klassischen Arbeit „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen“ gibt *Study* [1]) auch über die ebenen Dreiecke eine Übersicht. Er bespricht sie in ihrer Abhängigkeit von drei unabhängigen Parametern $\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_0}, \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_0}, \frac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_0}$, die mit den Dreiecksseiten a, b, c durch die Proportion:

$$\overline{Z}_0 : \overline{Z}_1 : \overline{Z}_2 : \overline{Z}_3 = \frac{abc}{8} : \frac{a}{2} : \frac{b}{2} : \frac{c}{2}$$

zusammenhängen. Die Wahl dieser Parameter gründet sich auf gewisse Analogien mit der Parameterdarstellung der Koeffizienten orthogonaler Substitutionen nach *Euler*, sowie auf Beziehungen zu den Additionstheoremen der *Weyerstraß*schen σ-Funktionen.

Hier sollen losgelöst von diesem Ausgangspunkte die Zusammenhangsverhältnisse der Mannigfaltigkeit der ebenen Dreiecke mit reellen Seiten etwas eingehender betrachtet werden. Hierzu ist die *Study*sche Auffassung zunächst kurz zu rekapitulieren.

A. Dreieckstypen.

Wir fragen zunächst nach der Gesamtheit der Dreiecke, die durch drei Punkte A, B, C als Ecken bestimmt sind, und wählen diese Punkte, um an die Anschauung anzuknüpfen, zunächst reell, d. h. so, daß $|a|+|b|>|c|$, $|b|+|c|>|a|$, $|c|+|a|>|b|$, bemerken aber schon hier, daß die Betrachtung ohne diese Beschränkung gültig bleibt. Dagegen sollen a, b, c durchweg reell sein. Das erste die drei Ecken verbindende Dreieck ist dann von dem in den Elementen betrachteten „*Euklid*ischen Typ“:

(1.) $a, b, c;\ \alpha, \beta, \gamma.$

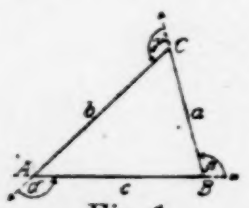


Fig. 1.

[1]) Abh. d. math-.phys. Kl. d. Kgl. sächs. Ges. d. Wissensch., Leipzig 1893.

Der Umlaufssinn der Ecken sei stets $A \to B \to C \to A$, wie er durch die den Seiten beigefügten Pfeile [1]) angedeutet wird. Statt der Innenwinkel führen wir mit *Study* die mit α, β, γ bezeichneten und mit Drehungssinn behafteten Außenwinkel ein. α ist die positive Drehung um A, welche $+ b$ mit $+ c$ zur Deckung bringt, usw. Für den Typus (1.) ist dann $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. Die nur gelegentlich benutzten Innenwinkel heißen α', β', γ'. — Aus (1.) leiten wir Dreieck

(2.) $$-a, b, c;\ \alpha, \beta + \pi, \gamma + \pi$$

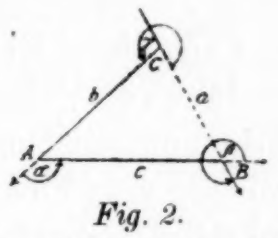


Fig. 2.

ab, indem wir den Weg von B nach C durch das Unendliche wählen. Winkelsumme 4π. Von demselben Typ sind die Dreiecke

(3.) $$a, -b, c;\ \alpha + \pi, \beta, \gamma + \pi,$$

(4.) $$a, b, -c;\ \alpha + \pi, \beta + \pi, \gamma.$$

Als neuer Typ schließt sich an ein Dreieck mit *zwei* negativen Seiten und der Winkelsumme 4π:

(5.) $$-a, -b, c;\ \alpha + \pi, \beta + \pi, \gamma.$$

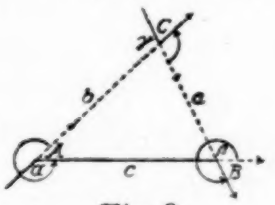


Fig. 3.

Dahin gehören auch die Dreiecke:

(6.) $$a, -b, -c;\ \alpha, \beta + \pi, \gamma + \pi,$$

(7.) $$-a, b, -c;\ \alpha + \pi, \beta, \gamma + \pi.$$

Endlich das Dreieck

(8.) $$-a, -b, -c;\ \alpha, \beta, \gamma$$

mit drei negativen Seiten und der Winkelsumme 2π:

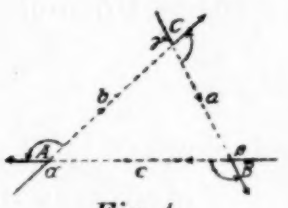


Fig. 4.

Faßt man den Übergang zu einem Nachbardreieck als Substitution auf und betrachtet die Dreieckswinkel nur bis auf Vielfache von 2π als bestimmt, so gilt:

Die Substitutionen (1.) *bis* (8.) *bilden eine Gruppe, deren Erzeugende die isomorphen Substitutionen* (2.), (3.), (4.) *sind.*

---

[1]) Diese sind zur Verdeutlichung der Winkel z. T. an den punktierten Verlängerungen der Seiten angebracht.

Man bemerkt, daß sich die 8 Substitutionen in die Paare 1, 8; 2, 6; 3, 7; 4, 5 mit übereinstimmenden Winkeln ordnen lassen, entsprechend dem Umstand, daß die Winkel nur von den Verhältnissen $a:b:c$ abhängen. Ihre Anzahl verdoppelt sich noch einmal, wenn man den gemeinschaftlichen Drehungssinn der Winkel ändert:

Es gibt 16 *Dreiecke, welche* 3 *Punkte der Ebene zu Ecken haben. In jedem von ihnen ist die Winkelsumme* $\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Gewisse Grenzfälle, die eintreten, wenn alle drei Ecken in eine Gerade fallen, betrachten wir später.

Wodurch rechtfertigt sich nun diese Erweiterung des Dreiecksbegriffes, speziell die Einführung negativer Seiten? Vollauf dadurch, daß die nach *Studys* Winkeldefinition abgeänderten trigonometrischen Formeln, vor allem Sinussatz und Cosinussatz auch für die Dreiecke vom nichteuklidischen Typ gültig bleiben; formal ausgedrückt, daß sie die Substitutionen (1.) bis (16.) gestatten. Der Cosinussatz heißt in neuer Schreibweise

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c\cos\alpha, \text{ usw.}$$

Bei dem Versuch dagegen, die trigonometrischen Formeln in herkömmlicher Fassung auf die Dreiecke vom nichteuklidischen Typ anzuwenden, stößt man auf Schwierigkeiten. Begreiflicher Weise! Denn nachdem die goniometrischen Funktionen auch für negative Winkel wohl definiert sind, läßt man diese Definitionen bei der üblichen Begründung der Trigonometrie beiseite und rechnet nur mit den Absolutwerten der Dreieckswinkel, daher denn auch die Trigonometrie nie so in sich konsequent und in solchem Maß von der Anschauung unabhängig wird wie etwa die analytische Geometrie. Erst *Studys* Dreiecksbegriff erlaubt die Ausnutzung der goniometrischen Formeln in ihrem ganzen Gültigkeitsbereich. Hierfür zwei Beispiele. Die für den Inkreisradius ϱ gültige Formel:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\varrho}{-a+b+c}$$

geht durch die Substitution $\begin{pmatrix} a, & b, & c; \alpha, \beta, \gamma; & \varrho \\ -a, & -b, & -c; \alpha, \beta, \gamma; & -\varrho \end{pmatrix}$ in sich selbst und durch jede der Substittinonen

$$\begin{pmatrix} a, b, c; & \alpha, \beta, & \gamma; & \varrho \\ -a, b, c; & \alpha, \beta+\pi, & \gamma+\pi; & \varrho_a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a, & b, & c; & \alpha, \beta, & \gamma; & \varrho \\ a, & -b, & -c; & \alpha, \beta+\pi, & \gamma+\pi; & -\varrho_a \end{pmatrix}$$

in die für den Ankreisradius ϱ_a gültige Formel

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\varrho_a}{a+b+c}$$

über; d. h.: Wir können den Dreiecken (8.), (2.), (6.) bezüglich die Inkreisradien $-\varrho$, $+\varrho_a$, $-\varrho_a$ zuschreiben. Wollte man, was der Anschauung besser entspricht, dem Dreieck (2.) den Radius $-\varrho_a$, dem Dreieck (6.) den Radius $+\varrho_a$ zuordnen, so müßte man die genannte Formel $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{2\varrho_a}{a+b+c}$ schreiben.

Die Substitutionen (2.) und (6.) führen abgesehen vom Vorzeichen die Innenwinkelhalbierende

$$w'_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\,(a+b+c)\,(-a+b+c)}$$

in sich selbst, die Innenwinkelhalbierenden

$$w'_\beta = \frac{1}{c+a}\sqrt{ca\,(a+b+c)\,(a-b+c)},\quad w'_\gamma = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab\,(a+b+c)\,(a+b-c)}$$

in die Außenwinkelhalbierenden

$$w_\beta = \frac{1}{c-a}\sqrt{ca\,(-a+b+c)\,(a+b-c)},$$

$$w_\gamma = \frac{1}{a-b}\sqrt{ab\,(-a+b+c)\,(a-b+c)}$$

absolut genommen über. Den Dreiecken (2.), (6.) kommen also die Winkelhalbierenden w'_α, w_β, w_γ zu. — In Übereinstimmung hiermit führt das Problem: Ein Dreieck aus drei gleichen (Innen)winkelhalbierenden zu bestimmen, außer auf gewisse Grenzdreiecke (siehe unten) auf vier Dreiecke mit den Seitenverhältnissen $1:1:1$; $-\frac{1}{2}(5-\sqrt{17}):1:1$; $1:-\frac{1}{2}(5-\sqrt{17}):1$; $1:1:-\frac{1}{2}(5-\sqrt{17})$. Jedes der drei letzteren ist Nebendreieck über der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel einen Winkel von $25^0\ 19'\ 36''$ einschließen, und für welches $w'_\alpha = w_\beta = w_\gamma$, bzw. $w_\alpha = w'_\beta = w_\gamma$, bzw. $w_\alpha = w_\beta = w'_\gamma$ ist.

Zur Berechnung der Winkel aus den Seiten stehen zur Verfügung die Formeln:

$$\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc},\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\,s_a}{bc}},\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_b\cdot s_c}{bc}},\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_b\cdot s_c}{s\,s_a}}$$

Die erste liefert zwei brauchbare Winkel. Doch sind hier die Realitätsverhältnisse nicht durchsichtig. Jede der Formeln für $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ liefert vier brauchbare Werte für α, von denen aber jedesmal nur zwei modulo 2π verschieden sind. Am besten eignet sich die Kotangensformel. Bei festem Zeichen der Quadratwurzel liefert sie im Intervall 0 bis 2π nur *einen* Wert α; der Wert $-\alpha$ entsteht bei Zeichenumkehr der Quadratwurzel. Zugleich gibt sie in der Form

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}}$$

wegen des analogen Baues der vier Klammerausdrücke den besten Einblick in die Realitätsverhältnisse.

B. Abbildung der ebenen Dreiecke auf den Punktraum.

Um das Verhalten der Funktionen $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ bequem zu verfolgen, bilden wir mit *Study* die ∞^3 Dreiecke auf den Punktraum ab, indem wir die Seiten als rechtwinklige Koordinaten deuten. Es werden also nur Dreicke mit reellen, jedoch auch negativen Seiten abgebildet. Jedem solchen Dreieck ist dann ein Bildpunkt zugeordnet, und die drei Kotangenten erscheinen als zweideutige algebraische Funktionen des Ortes im Raum.

Verfolgen wir einen beliebigen Weg im Raume, so ändern die Kotangenten ihre Realitätsverhältnisse allemal dann, wenn eines der Polynome $a-b+c$,

$a + b - c$, $a + b + c$, $-a + b + c$ sein Zeichen wechselt. Die Gleichungen

$$a - b + c = 0,$$
$$a + b - c = 0,$$
$$a + b + c = 0,$$
$$-a + b + c = 0$$

oder in kürzerer Schreibweise $s = 0$, $s_a = 0$, $s_b = 0$, $s_c = 0$ stellen in unserm Koordinatensystem die Flächen einer vierseitigen Ecke dar:

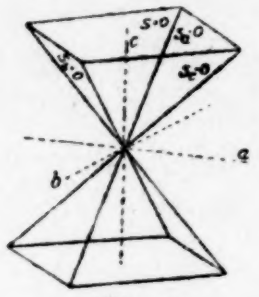


Fig. 5.

Die Kanten sind die Diagonalen eines Würfels. Von den $\binom{4}{2} = 6$ durch sie bestimmten Ebenen treten aber nur vier auf, welche die Hälften eines regulären Oktaeders bilden, die im Nullpunkt als Scheitelfiguren aneinandergesetzt sind. Gleichwohl ist die c-Achse nicht etwa vor den andern ausgezeichnet. Man hat sich ja die vier Ebenen in unendlicher Ausdehnung zu denken, und solchergestalt bilden sie die folgende Figur:

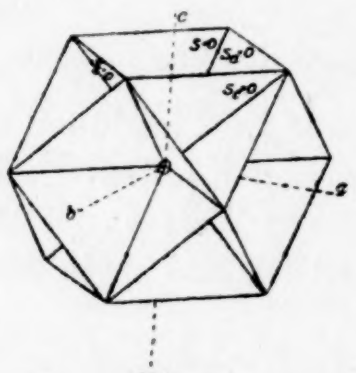


Fig. 6.

Die vier Ebenen teilen den Raum in 14 Fächer. Sechs von ihnen sind oktaedrische Räume (Vierkantenräume), die bezüglich von den Achsen $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ durchsetzt werden. Wir bezeichnen sie mit $R_{+a}, R_{-a}, \ldots$ Dazu kommen acht tetraedrische Räume (Dreikantenräume). Man bemerkt deren in der Figur zwei nach vorne sich erstreckende mit einer gemeinsamen Kante, welche den von $+ a$ und $+ b$ gebildeten Winkel halbiert. Entsprechendes gilt von den andern Kanten des Dreikants. In leicht ersichtlicher Weise seien sie mit $R_{+a,+b,+c}$ bzw. $R_{+a,+b,-c}$ bezeichnet. Ihre Gesamtzahl ergibt sich den möglichen Zeichenkombinationen entsprechend zu 8.

Untersuchen wir nun die Vorzeichen der s, s_a, s_b, s_c innerhalb der 14 Fächer unter Ausschluß der Grenzpunkte. Da auf der Achse $+ c$ ist: $a = 0$, $b = 0$, $c > 0$, also $s > 0$, $s_a > 0$, $s_b > 0$, $s_c < 0$, so gilt dasselbe für das ganze Gebiet R_{+c}. Die Vorzeichen der s, s_a, s_b, s_c in den 6 Oktaederräumen sind:

	s	s_a	s_b	s_c
R_{+a}	+	−	+	+
R_{-a}	−	+	−	−
R_{+b}	+	+	−	+
R_{-b}	−	−	+	−
R_{+c}	+	+	+	−
R_{-c}	−	−	−	+

Aus dem Raume R_{+c} gelangt man in den Raum $R_{+a,+b,+c}$, indem man $s_c = 0$ durchsetzt. Es ist also in $R_{+a,+b,+c}$ $s > 0$, $s_a > 0$, $s_b > 0$, $s_c > 0$, im Scheitelraume $R_{-a,-b,-c}$ ist $s < 0$, $s_a < 0$, $s_b < 0$, $s_c < 0$. Die Kante $s_a = 0$, $s_b = 0$ durchsetzend gelangen wir aus $R_{+a,+b,+c}$ nach $R_{+a,+b,-c}$. So entsteht die Vorzeichentafel für die 8 tetraedrischen Räume:

	s	s_a	s_b	s_c
$R_{+a,+b,+c}$	+	+	+	+
$R_{-a,-b,-c}$	−	−	−	−
$R_{-a,+b,+c}$	+	+	−	−
$R_{+a,-b,-c}$	−	−	+	+
$R_{+a,-b,+c}$	+	−	+	−
$R_{-a,+b,-c}$	−	+	−	+
$R_{+a,+b,-c}$	+	−	−	+
$R_{-a,-b,+c}$	−	+	+	−

Bei voneinander unabhängigen s, s_a, s_b, s_c hätte man $2^4 = 16$ Vorzeichenkombinationen. Die Relation

$$s_a + s_b + s_c = s$$

verbietet jedoch die beiden Kombinationen

$$s_a > 0,\ s_b > 0,\ s_c > 0,\ s < 0 \text{ und } s_a < 0,\ s_b < 0,\ s_c < 0,\ s > 0,$$

wodurch sich ihre Zahl auf 14 entsprechend den 14 Raumgebieten reduziert. Die Betrachtung der Tabelle lehrt:

Die Funktionen $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ *sind in den* 8 *tetraedrischen Räumen reell, in den* 6 *oktaedrischen rein imaginär.*

Da ferner jedes tetraedrische Gebiet einer bestimmten Vorzeichenkombination der a, b, c entspricht, so erkennt man weiter:

Die 16 *Dreieckstypen mit reellen Seiten und Winkeln verteilen sich auf die* 8 *tetraedrischen Gebiete in der Weise, daß jedem solchen Gebiet zwei Typen angehören, die sich nur durch den Drehungssinn der Winkel unterscheiden.*

Eine Möglichkeit, der Anschauung noch besser zu genügen, entspringt der Überlegung, daß Winkel und Gestalt eines Dreiecks nur von den Verhältnissen $a : b : c$ abhängen, d. h., daß jeder Geraden durch den Nullpunkt eine Schar ähnlicher Dreiecke, gestaltlich also nur *ein* Dreieck entspricht. Wir legen deshalb um den Nullpunkt eine Kugel. Unser Ebenensystem erzeugt dann eine gewisse Teilung ihrer Oberfläche in reguläre Vierecke und Dreiecke, die den oktaedrischen, bzw. tetraedrischen Raumgebieten entsprechen.

Figur 11 gibt diese Kugelteilung in stereographischer Projektion von Südpole aus. Die vier Kreise repräsentieren die Ebenen $s = 0$, $s_a = 0$, $s_b = 0$, $s_c = 0$. Die beiden Schnittpunkte je zweier Kreise wie G und R, J und L entsprechen einer Oktaederkante. In jedes dreieckige Feld ist der zugehörige Dreieckstyp eingetragen. Von Interesse sind die von *Study* als „*Grenz- und Übergangsdreiecke*" bezeichneten Formen, welche den Flächen bzw. Kanten des Oktaeders angehören. Die *Grenzdreiecke* auf der Fläche $s = 0$ sind von dem Typ:

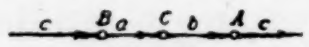


Fig. 7.

mit $\alpha = \beta = \gamma = 0$, wobei a, b, c noch zyklisch vertauschbar sind; auf der Fläche $s_a = 0$ von einem der Typen:

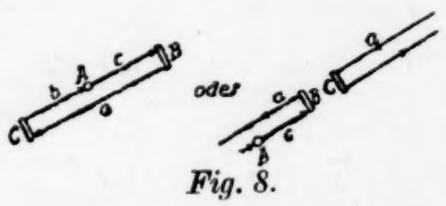


Fig. 8.

mit $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \pm \pi$, je nachdem a und $b + c$ gleichzeitig positiv oder negativ sind. Die beiden Typen verteilen sich auf die verschiedenen Abschnitte des Kreises $s_a = 0$.

Auf der Oktaederkante $s_a = 0$, $s = 0$ also in den Punkten S, H unserer Figur haben wir das *Übergangsdreieck*:

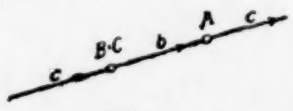


Fig. 9.

mit $a = 0$, $b + c = 0$, $\alpha = 0$, β, γ unbestimmt.

Auf der Kante $s_b = 0$, $s_c = 0$ (in U und F):

Fig. 10.

mit $a = 0$, $b - c = 0$, $\alpha = \pi$, β, γ unbestimmt.

Auf die hier auftretenden Singularitäten für β und γ kommen wir noch zurück. Die betrachteten 12 Punkte sind die einzigen Bildpunkte reeller Dreiecke mit *einer* verschwindenden Seite. Durch sie allein vollzieht sich ein stetiger Übergang zwischen den 16 reellen Typen, ohne daß man imaginäre Winkelwerte zu passieren hätte.

Sollen bei einem reellen Dreieck *zwei* Seiten verschwinden, so muß es auch die dritte Seite. Dies trifft zu im O-Punkte unserer Raumeinteilung, dem einzigen Punkte, der auf der Kugelfläche keinen Repräsentanten hat. In ihm sind alle drei Winkel unbestimmt. Doch entspricht jeder Fortschreitungsrichtung durch ihn ein Dreieck mit bestimmten reellen oder rein imaginären Winkeln. Er stellt somit eine höhere Singularität dar und ist gleichsam der gesamten Kugelfläche äquivalent.

Verfolgen wir jetzt eingehender das Verhalten von $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. In den unschraffierten Feldern nimmt diese Funktion reelle, in den schraffierten rein imaginäre Werte, auf den Kreisen $s_a = 0$, $s_b = 0$ den Wert $0^{\frac{1}{2}}$ und auf den Kreisen $s = 0$, $s_c = 0$ den Wert $\infty^{\frac{1}{2}}$ an, wenn wir den Grad des Verchwindens bzw. Unendlichwerdens durch Exponenten andeuten. Genauer nimmt $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ in jedem Punkt wegen des Doppelzeichens der Quadratwurzel zwei entgegengesetzt gleiche Werte an, eindeutige Werte nur auf den vier Grenzkurven. Betrachten wir daher nach *Riemanns* Vorgang in der Funktionentheorie jenen Doppelwerten entsprechend die Kugelfläche als mit zwei Blättern überdeckt, so haben jene Grenzlinien die Bedeutung von *Verzweigungskurven*, längs deren die beiden Blätter zusammenhängen. Die Werte von $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ sind in der Figur den Grenzkurven beigefügt.

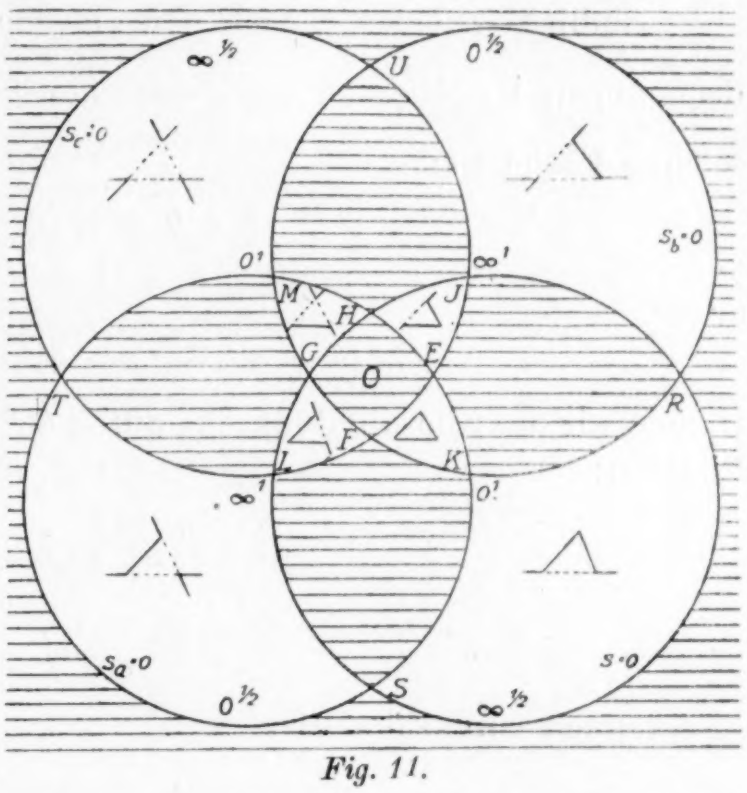


Fig. 11.

Die Punkte E, F, G, H und die dazu diametralen T, U, R, S aber sind Stellen der Unbestimmtheit. In den Punkten E und T z. B. nimmt $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s_a s_b}{s s_c}}$ wegen des gleichzeitigen Verschwindens von s_a und s_c die Form $\frac{0}{0}$ an. Aus $s_a = 0$, $s_c = 0$ folgen aber die Gleichungen $a - c = 0$, $b = 0$. Schreiben wir daher, um eine bestimmte Art der Annäherung an die Stellen der Unbestimmtheit auszudrücken, dem Bruche $\frac{a-c}{b}$ einen bestimmten Grenzwert λ vor, so nähert sich $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ dem Grenzwert $\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$. Die Gleichung $\frac{a-c}{b} = \lambda$ stellt aber eine gewisse, die Oktaederkante TE enthaltende Ebene dar; wir haben also, wenn wir für den Augenblick unsere Betrachtung wieder auf den Raum ausdehnen, den Satz:

Durchschreitet man auf einer Geraden g einen Punkt P der Oktaederkante k, so hängt der in P erreichte Wert von $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ *nur von der Lage der Ebene* (g, k), *nicht aber von der Lage von g in jener Ebene ab.*

Oder bei Übertragung auf die Kugel:

Jeder Fortschreitungsrichtung auf der Kugelfläche durch einen der 8 Oktaederpunkte E, F, G, H, T, R, U, S entsprechen zwei entgegengesetzt gleiche Werte von $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ *unabhängig vom Sinne dieser Richtung.*

Endlich fragen wir nach den Flächen des Raumes und ihren Kugeldurchdringungen, längs deren $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ einen konstanten Wert λ hat. Die Gleichung einer solchen Fäche ist:

$$\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \lambda^2$$

oder

$$\lambda^2 (a+b)^2 + (a-b)^2 - (\lambda^2+1)\, c^2 = 0.$$

Drehen wir das Koordinatenkreuz durch 45^0 um die c-Achse entsprechend der Substitution:

$$a' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(a+b)$$

$$b' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(-a+b),$$

so erkennen wir in der Fläche

$$\lambda^2 a'^2 + b'^2 = \frac{\lambda^2+1}{2}\, c^2$$

einen Kegel zweiter Ordnung mit der Spitze im Nullpunkt, der die Ebene $c = \text{const}$ in einer Ellipse oder Hyperbel schneidet, je nachdem $\lambda^2 \gtrless 0$, d. h. $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ reell oder imaginär ist. Jede Kegelfläche enthält die vier Oktaederkanten. Betrachten wir den Schnitt eines solchen Kegels mit der Kugelfläche, so erhalten wir den Satz:

Längs jedes die Punkte E, F, G, H enthaltenden sphärischen Kegelschnittes, der die Ebenen $a \pm b = 0$ zu Symmetrieebenen und das Kugelzentrum zur Kegelspitze hat, besitzt $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ *einen konstanten Wert. Der Kegelschnitt erscheint aus der c-Richtung betrachtet als sphärische Ellipse und verläuft ganz in den dreieckigen Feldern, falls* $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ *reell; er erscheint aus der c-Richtung betrachtet als Hyperbel und verläuft in den viereckigen Feldern, falls* $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ *rein imaginär ist.*

Bekanntlich kann man die aus zwei geschlossenen Kurvenzügen bestehende sphärische Ellipse auch als sphärische Hyperbel deuten und umgekehrt; es kommt eben nur auf die Richtung an, in der man die Kugel betrachtet. Im Falle der „Ellipse" enthalten die beiden Kurvenzüge die Punkte E, F, G, H bzw. R, S, T, U, im Falle der „Hyperbel" die Punkte E, H, R, U bzw. F, G, S, T oder auch E, F, R, S bzw. G, H, T, U, je nachdem $\lambda^2 < -1$ oder $-1 < \lambda^2 < 0$ ist. — In stereographischer Projektion erscheinen diese Kurven übrigens nicht als Kegelschnitte, sondern als Kurven vierter Ordnung, deren Gleichung man erhält, indem man in die Kegelgleichung die Abbildungsformeln:

$$a = \frac{4R^2 x}{4R^2 + x^2 + y^2},\quad b = \frac{4R^2 y}{4R^2 + x^2 + y^2},\quad c = \frac{4R^2 - (x^2+y^2)}{4R^2 + x^2 + y^2}\cdot R$$

einsetzt. R bedeutet den Kugelradius, die Achsen der x und y in der Bildebene laufen den Achsen der a und b parallel.

Wirkliche Ellipsen und Hyperbeln dagegen entstehen, wenn man die Kugel vom *Mittelpunkte* aus auf die Ebene $c = R$ projiziert. Die Kreise $s = 0$, $s_a = 0$, $s_b = 0$, $s_c = 0$ werden zu geraden Linien. In der beigegebenen Figur ist eine Ellipse mit $\lambda^2 > 1$ und eine Hyperbel mit $\lambda^2 < -1$ eingetragen.

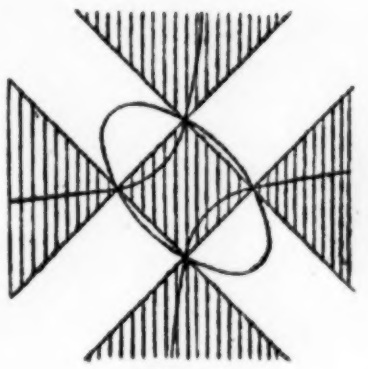


Fig. 12.

Zur Theorie des quadratischen *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern.

Von Herrn *Helmut Hasse* in Kiel.

In zwei kürzlich erschienenen Arbeiten [1]) beschäftigt sich Herr *Hensel* mit dem *Hilbert*schen Normenrestproblem in einem beliebigen algebraischen Körper k, der die l-te Einheitswurzel ζ enthält, in bezug auf einen relativ-zyklischen Oberkörper K vom Primzahlgrade l, dessen Relativ-Grundgleichung in der Form

$$x^l = \alpha$$

angenommen werden kann. Die Frage, unter welchen Bedingungen eine beliebige Zahl β aus k Normenrest von $K = k(\sqrt[l]{\alpha})$ nach einem Primteiler $\mathfrak{p}$ von k ist, wird in der ersten jener Arbeiten für ein zu l primes $\mathfrak{p}$, in der zweiten für einen Teiler $\mathfrak{l}$ von l mit Hilfe der den einzelnen $\mathfrak{p}$ zugeordneten „*Hensel*schen Körper" $k(\mathfrak{p})$ und der in ihnen bestehenden multiplikativen Darstellung [2]) ihrer Zahlen vollständig beantwortet, und so eine neue systematische Theorie des Normenrestproblems geschaffen, die vor der bisherigen *Hilbert-Furtwängler*schen u. a. den Vorzug hat, daß die beiden Fälle: „$\mathfrak{p}$ prim zu l und Teiler $\mathfrak{l}$ von l" eine gleichartige Behandlung auf Grund derselben Prinzipien gestatten. Während nun die Resultate der ersten Arbeit ($\mathfrak{p}$ prim zu l) ohne Schwierigkeit zu einer Darstellung des Normenrestcharakters $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ in Form einer Potenz von ζ führen, deren Exponent sich aus den multiplikativen Darstellungen von α und β (und zwar allein aus den beiden ersten Exponenten: Ordnungszahl und Index) leicht ergibt (a. a. O., S. 9), ist dies in der zweiten Arbeit für einen Teiler $\mathfrak{l}$ von l nicht unmittelbar der Fall. Zur Entscheidung über den Normenrestcharakter der Zahlen β aus k in bezug auf $k(\sqrt[l]{\alpha})$ müssen nämlich hier die β durch ein besonderes Fundamentalsystem multiplikativ dargestellt

---

[1]) *K. Hensel*, Über die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ-*Abel*schen Zahlkörpern, Ann. 85, S. 1 ff. und *K. Hensel* und *H. Hasse*, Über die Normenreste eines relativ-zyklischen Körpers vom Primzahlgrad l nach einem Primteiler $\mathfrak{l}$ von l, erscheint demnächst in den Math. Ann. Die letztere von Herrn *Hensel* und mir gemeinsam bearbeitete Abhandlung soll im folgenden kurz mit H.-H. zitiert werden.

[2]) Siehe hierzu H.-H., nach Gl. (1.)

werden, das sich jedesmal aus dem betreffenden α ergibt, und über dessen Zusammenhang mit dem ursprünglichen, (durch das α dargestellt war), sich nichts Genaueres aussagen läßt. Es ist das Ziel dieser Arbeit, für den Fall, daß die Primzahl $l = 2$ ist, unsere gemeinsame Arbeit H.-H. in diesem Sinne fortzuführen. Ich werde nämlich den folgenden Satz beweisen:

Hauptsatz. *Ist* $\mathfrak{l}$ *ein Primteiler der* 2 *der Ordnung* e *vom Grade* f *und sind in* $k(\mathfrak{l})$ *die* 2^n*-ten Einheitswurzeln die höchsten, deren Grad eine Potenz von* 2 *ist* ($n \geqq 1$), *so läßt sich das nach steigenden Graden geordnete Fundamentalsystem*

$$\lambda;\ \eta_1^{(1)}, \ldots, \eta_f^{(1)};\ \eta_1^{(2)} \ldots, \eta_f^{(2)}; \ldots;\ \eta_1^{(e)}, \ldots \eta_f^{(e)};\ \eta_a$$

für die multiplikative Darstellung aller Zahlen von $k(\mathfrak{l})$ *so wählen, daß für zwei beliebige Zahlen aus* $k(\mathfrak{l})$:

$$\alpha = \lambda^{c_0} \cdot \prod_{k=1}^{e} \prod_{i=1}^{f} \eta_i^{(k)^{c_i^{(k)}}} \cdot \eta_a^{c_a}\, \alpha_0^2 \ (\mathfrak{l}),$$

$$\beta = \lambda^{d_0} \cdot \prod_{k=1}^{e} \prod_{i=1}^{f} \eta_i^{(k)^{d_i^{(k)}}} \cdot \eta_a^{d_a}\, \beta_0^2 \ (\mathfrak{l})\ ^{1})$$

der Normenrestcharakter von β *zu* $k(\sqrt{\alpha})$ *und gleichzeitig der von* α *zu* $k(\sqrt{\beta})$ *nach* $\mathfrak{l}$ *durch die Formel*:

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{\mathfrak{L}(c/d)}$$

gegeben wird. Darin bedeutet $\mathfrak{L}(c/d)$ *die folgende symmetrische Bilinearform der Variablen* $c_0, c_i^{(k)}, c_a$ *und* $d_0, d_i^{(k)}, d_a$:

$$\mathfrak{L}(c/d) = c_0\, d_a + c_a\, d_0 + (e-1)\, 2^{n-1}\, c_1^{(r)}\, d_1^{(r)} + \sum_{k=1}^{e} \sum_{i=1}^{f} c_i^{(k)}\, d_i^{e+1-k},$$

deren Koeffizientenmatrix

(1.)

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & E_f\ E_f & \\ & (e-1)2^{n-1} & & & \\ & & & & \\ & E_f\ E_f & & & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

im allgemeinen in der Nebendiagonale an beiden Ecken eine 1 (*entsprechend den Gliedern* λ *und* η_a) *und dazwischen* e f*-reihige Einheitsmatrizen* E_f (*entsprechend den* e *Systemen von je* f *Basiseinheiten*) *besitzt, und nur für gerades* e *und* $n = 1$ *außerdem noch an einer gewissen Stelle der Hauptdiagonale eine einzelne* 1 *aufweist* [2]).

Für den Fall, daß k der rationale Körper, also $\mathfrak{l} = 2$, $e = f = 1$, $n = 1$ ist, deckt sich der Inhalt dieses Satzes mit der bekannten Tatsache, daß für zwei durch das Fundamentalsystem $2, -1, 5$ für den Bereich von 2 dargestellte Zahlen

---

[1]) Betr. diese Darstellung durch ein Fundamentalsystem siehe diese Abhandlung unten S. 79.

[2]) Die dieser 1 entsprechenden beiden Exponenten $c_1^{(r)}$, $d_1^{(r)}$ können auch die Exponenten c_0, d_0 sein.

$$\alpha = 2^{c_0}(-1)^{c_1}5^{c_2}\alpha_0^2 \quad (2),$$
$$\beta = 2^{d_0}(-1)^{d_1}5^{d_2}\beta_0^2 \quad (2)$$

das Normenrestsymbol durch die Formel

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{2}\right) = (-1)^{c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0}$$

gegeben wird [1]).

Eine entsprechende Untersuchung für ungerades l stößt auf die bekannte Schwierigkeit der Unterscheidung der $l-1$ Sorten von Normennichtresten, die im Falle $l=2$ fortfällt, und erfordert daher weitere, sehr tiefliegende Betrachtungen, die ich mir für eine spätere Gelegenheit vorbehalte.

Ich stelle dem Nachweis des genannten Hauptsatzes einige allgemeine Bemerkungen, sowie die für $l=2$ spezialisierten Resultate von H.-H. voran. Sei für das folgende ein- für allemal $\mathfrak{l}$ ein Primteiler der 2 in k der Ordnung e vom Grade f und $e \cdot f = m$, ferner $k(\mathfrak{l})$ der zu $\mathfrak{l}$ gehörige (transzendente) *Hensel*sche Erweiterungskörper von k. Das Symbol $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ für zwei beliebige Zahlen β, α aus $k(\mathfrak{l})$, speziell also zwei beliebige Zahlen aus k, werde gleich $+1$ oder -1 gesetzt, je nachdem β für den Bereich von $\mathfrak{l}$ der Relativnorm einer Zahl aus $k(\sqrt{\alpha})$ gleich ist oder nicht. Da dies mit der Lösbarkeit oder Nichtlösbarkeit der Gleichung

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = z^2 \quad (\mathfrak{l})$$

in nicht sämtlich verschwindenden Zahlen x, y, z aus $k(\mathfrak{l})$ gleichbedeutend ist [2]), folgt ohne weiteres die Richtigkeit der Gleichung:

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right); \quad (\textit{Vertauschungssatz}).$$

Ist α oder β Quadrat in $k(\mathfrak{l})$, so ist stets $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = +1$. Für beliebige α, β ändert sich der Wert von $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ nicht, wenn α und β mit beliebigen Quadraten aus $k(\mathfrak{l})$ multipliziert werden. Ist also G die Gruppe aller Zahlen von $k(\mathfrak{l})$, G_0 die Untergruppe der Quadratzahlen in $k(\mathfrak{l})$ und

$$G = G_0 + G_1 + \ldots$$

die Zerlegung von G nach G_0 in Nebengruppen G_i; so hängt der Wert von $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ nur davon ab, welchen Nebengruppen G_i und G_k die Zahlen β und α angehören. Es ist danach klar, was unter dem Symbol $\left(\frac{G_i, G_k}{\mathfrak{l}}\right)$ zu verstehen ist. Speziell ist stets $\left(\frac{G_0, G_k}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ und $\left(\frac{G_i, G_0}{\mathfrak{l}}\right) = +1$.

---

[1]) *Hensel*, Zahlentheorie, 1913, S. 330.

[2]) Ist eine solche Gleichung überhaupt nicht-identisch lösbar, so ist sie auch in sämtlich von Null verschiedenen x, y, z lösbar. (Siehe *Hensel*, Zahlentheorie, S. 308.)

Wie in H.-H. im Anschluß an die dortige Gleichung (1.) ausgeführt, besteht für alle Zahlen α von $k(\mathfrak{l})$ die eindeutige multiplikative Darstellung

$$(2.) \qquad \alpha = \lambda^{c_0}\, \eta_1^{c_1} \dots \eta_m^{c_m}\, \eta_a^{c_a}\, \alpha_0^2 \ (\mathfrak{l}); \quad (c_r = 0 \text{ oder } 1)$$

durch ein Fundamentalsystem, dessen Elemente sind:

a.) eine Primzahl λ für $\mathfrak{l}$, (d. h. eine genau durch $\mathfrak{l}^1$ teilbare Zahl aus $k(\mathfrak{l})$),

b.) e Basissysteme von je f Einseinheiten für die Gruppen der Einseinheiten der e ungeraden Grade $1, 3, \dots, 2e-1$:

$$\eta_r = \eta_i^{(k)} = 1 + w_i^{(k)}\, \lambda^{2k-1}; \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, ef = m \\ i = 1, 2, \dots, f \\ k = 1, 2, \dots, e \end{matrix};$$

$((w_1^{(k)}, \dots, w_f^{(k)})$ e Systeme von je f mod $\mathfrak{l}$ linear unabhängigen Einheiten aus $k(\mathfrak{l})$),

c.) eine „ausgezeichnete“ Einseinheit:

$$\eta_a = 1 + 4w;$$

wo $$s_{\mathfrak{l}}(w) = w + w^2 + \dots + w^{2^f-1} \not\equiv 0 \bmod 2.$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung (2.) folgt ohne weiteres, daß es zur Untergruppe G_0 der α_0^2 genau 2^{m+2} verschiedene Nebengruppen G_i gibt. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G} = \frac{G}{G_0}$ ist daher eine endliche *Abel*sche Gruppe vom Grade 2^{m+2} und Typus $(2, 2, \dots, 2)$ als deren Basis die den $m+2$ Elementen a.), b.), c.) eines beliebigen Fundamentalsystemes für $k(\mathfrak{l})$ entsprechenden Nebengruppen genommen werden können.

Das Resultat von H.-H., spezialisiert für $l = 2$, ist nun folgendes:

Ist ein beliebiges α aus $k(\mathfrak{l})$ in der Form (2.) gegeben, und sieht man von dem trivialen Falle, daß alle $c_r = 0$ sind, also α Quadrat in $k(\mathfrak{l})$ ist, ab, so läßt sich ein neues Fundamentalsystem $\lambda'; \eta_1', \dots, \eta_m'; \eta_a'$ (und zwar zu jedem der $2^{m+2}-1$ möglichen α ein besonderes) so finden, daß für alle und nur die β das Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ ist, für die in der Darstellung

$$\beta = \lambda'^{d_0'}\, \eta_1'^{d_1'} \dots \eta_m'^{d_m'}\, \eta_a'^{d_a'}\, \beta_0'^2 \ (\mathfrak{l}); \quad (d_r' = 0, 1)$$

ein bestimmter der Exponenten d_r' gerade ist, und zwar ist dies

a.) für $\alpha = \eta_a\, \alpha_0^2$ $(\mathfrak{l})$ der Exponent von λ'

b.) „ $\alpha = \lambda\, \eta_1^{c_1} \dots \eta_m^{c_m}\, \eta_a^{c_a}\, \alpha_0^2$ $(\mathfrak{l})$ der Exponent von η_a'

c.) „ $\alpha = \eta_r\, \eta_{r+1}^{c_{r+1}} \dots \eta_m^{c_m}\, \eta_a^{c_a}\, \alpha_0^2$ $(\mathfrak{l})$ der Exponent eines bestimmten $\eta_{r'}'$, dessen Grad sich mit dem von η_r zu $2e$ ergänzt.

Ich nenne im folgenden zwei Grade, die sich zu $2e$ ergänzen, komplementär.

Aus a.) folgt sofort, daß unabhängig vom gewählten Fundamentalsystem gilt:

$$(3.) \quad \left(\frac{\lambda, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = -1; \ \left(\frac{\eta_r, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = +1; \ (r = 1, 2, \dots, m); \ \left(\frac{\eta_a, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = +1.$$

Denn der Exponent von λ' (die Ordnungszahl) ist invariant gegen Transformation

des Fundamentalsystems. Weiter folgt aus c.), daß unabhängig vom gewählten Fundamentalsystem

$$\left(\frac{\eta_s, \eta_r}{\mathfrak{l}}\right) = +1 \tag{4.}$$

ist, wenn die Summe der Grade von η_r und η_s größer als $2e$ ist. Denn der Grad g eines η_s ist als höchster Exponent, für den noch die Kongruenz gilt:

$$\eta_s \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^g,$$

sicher invariant gegen Transformation des Fundamentalsystems, und eine Einseinheit vom Grade g kann bei der Darstellung durch ein beliebiges Fundamentalsystem die Basiseinheiten niedrigeren Grades nur in gerader Potenz enthalten.

Das genannte Resultat von H.-H. besagt ferner allgemein folgendes: Ist G_k eine von G_0 verschiedene Nebengruppe, so bilden diejenigen Nebengruppen G_i, für die $\left(\frac{G_i, G_k}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ ist, stets eine Untergruppe $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. Setzt man daher

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1$$

(sodaß also $\mathfrak{H}_0$ alle Normenreste, $\mathfrak{H}_1$ alle Normennichtreste des durch G_k definierten, relativ-quadratischen Körpers nach $\mathfrak{l}$ enthält), so folgt aus $\mathfrak{H}_0^2 = \mathfrak{H}_1^2 = \mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$, daß die im Falle eines α aus G_0 triviale Gleichung

$$\left(\frac{\beta_1\,\beta_2, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta_1, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta_2, \alpha}{\mathfrak{l}}\right);\ (\textit{Zerlegungssatz})$$

allgemein gilt, und natürlich ebenso nach dem Vertauschungssatz:

$$\left(\frac{\beta, \alpha_1\,\alpha_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha_1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta, \alpha_2}{\mathfrak{l}}\right).$$

Aus Vertauschungs- und Zerlegungssatz ergibt sich nunmehr unmittelbar die allgemeine Form der Auswertungsgleichung für ein beliebiges Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)$, nämlich:

Satz 1. *Zu jedem Fundamentalsystem* $\eta_0;\ \eta_1, \ldots, \eta_m;\ \eta_{m+1}$[1]) *existiert eine symmetrische Biliniarform* $\mathfrak{L}(c/d) = \sum_{i,k=0}^{m+1} l_{ik}\, c_i\, d_k$; $(l_{ik} = l_{ki} = 0 \textit{ oder } 1)$, *so daß für zwei beliebige Zahlen aus* $k(\mathfrak{l})$:

$$\alpha = \prod_{i=0}^{m+1} \eta_i^{c_i}\, \alpha_0^2 \textit{ und } \beta = \prod_{k=0}^{m+1} \eta_k^{d_k}\, \beta_0^2\,(\mathfrak{l});\ (c_i, d_k = 0, 1)$$

die Gleichung gilt:

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{\mathfrak{L}(c/d)}.$$

Beweis: Zerlegt man das Symbol

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{m+1} \eta_i^{c_i},\ \prod_{k=0}^{m+1} \eta_k^{d_k}}{\mathfrak{l}}\right)$$

---

[1]) Ich bezeichne der Einheitlichkeit halber im folgenden die Elemente λ und η_a mit η_0 und η_{m+1}.

nach dem Zerlegungssatz, so folgt:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{i,k=0}^{m+1} \left(\frac{\eta_i, \eta_k}{\mathfrak{l}}\right)^{c_i d_k},$$

also wenn $\left(\frac{\eta_i, \eta_k}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{l_{ik}}$ gesetzt wird, die angegebene Formel. Aus dem Vertauschungssatz folgt $l_{ik} = l_{ki}$.

Ich bezeichne im folgenden die symmetrische Matrix (l_{ik}) der Form $\mathfrak{L}(c/d)$ ebenfalls mit $\mathfrak{L}$. Jedem Fundamentalsystem $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ ist dann eine solche Matrix $\mathfrak{L}$ zugeordnet. In gleichem Sinne rede ich auch von der zwei beliebigen Teilsystemen $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \ldots$ und $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \ldots$ eines Fundamentalsystems zugeordneten Matrix, nämlich der diesen Teilsystemen auf Grund von $\left(\frac{\eta_i, \eta_k}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{l_{ik}}$ entsprechenden Teilmatrix von $\mathfrak{L}$.

Die Aufgabe der folgenden Ausführungen besteht dann nur noch darin, das System $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ durch ein passend gewähltes äquivalentes $\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_{m+1}$ so zu ersetzen, daß die diesem neuen System zugeordnete Matrix $\bar{\mathfrak{L}}$ eine möglichst einfache Gestalt bekommt. In ihrer Eigenschaft als Basis der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{G}$ müssen die beiden Systeme $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ und $\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_{m+1}$ durch eine Substitution

$$(5.) \qquad \bar{\eta}_k = \prod_{i=0}^{m+1}{}' \eta_i^{p_{ki}} \xi_k^2; \quad (p_{ki} = 0 \text{ oder } 1)$$

zusammenhängen, deren Koeffizientenmatrix $P = (p_{ik})$ eine Determinante $\equiv 1$ mod. 2 hat. Zu dem neuen System $\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_{m+1}$ gehört dann die neue Matrix

$$\bar{\mathfrak{L}} = P' \mathfrak{L} P,$$

die aus $\mathfrak{L}$ durch kogrediente Transformation mittels $P = (p_{ik})$ entsteht. Umgekehrt entspricht auch jeder solchen kogredienten Transformation $P' \mathfrak{L} P$ von $\mathfrak{L}$ eine Transformation (5.) der Basis $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ vermöge $P' = (p_{ki})$ in eine äquivalente.

Daraus folgt sofort, daß die Determinante von $\mathfrak{L}$:

$$(6.) \qquad |\mathfrak{L}| = |l_{ik}| \equiv 1 \mod 2$$

ist. Denn sonst könnte man eine mod. 2 ganze Substitution P, deren Determinante $\equiv 1$ mod. 2 ist, angeben, sodaß $P'\mathfrak{L}P$ eine symmetrische Bilinearform von weniger Variablen wäre. Das würde aber offenbar bedeuten, daß auch noch gewisse von G_0 verschiedene Nebengruppen G_i existierten, sodaß für jedes G_k: $\left(\frac{G_k, G_i}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ wäre, im Gegensatz zu dem genannten Resultat von H.-H.

Für den vorliegenden Zweck sind solch allgemeine Transformationen P nicht brauchbar. Denn durch sie (durch P') wird zwar die Basis $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ von $\mathfrak{G}$ in eine neue Basis $\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_{m+1}$ von $\mathfrak{G}$ transformiert, die auch wieder Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung aller Zahlen aus $k(\mathfrak{l})$ ist (im allgemeinen Sinne, nämlich eben als Basis für die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Zahlen von $k(\mathfrak{l})$). Jedoch wird dies Fundamentalsystem im allgemeinen nicht mehr von der besonderen a. S. in a.), b.), c.) ausgeführten Gestalt sein. Da aber diese Gestalt des Fundamentalsystems für

die Anwendungen bei weitem am vorteilhaftesten ist, indem sie die bei der Darstellung beliebiger Zahlen aus $k(\mathfrak{l})$ auftretenden Exponenten c_r in einfacher Weise successive zu berechnen gestattet, wollen wir die anzuwendenden Substitutionen P so einschränken, daß die genannten Eigenschaften des Systems $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ erhalten bleiben. Eine sehr allgemeine Substitution dieser Art ist die folgende:

$$P' = \begin{array}{c|cccccc|c} & \eta_0 & (\eta_1, \ldots, \eta_f) & (\eta_{f+1}, \ldots, \eta_{2f}) & \cdots\cdots & (\eta_{(e-1)f+1}, \ldots, \eta_{ef}) & \eta_{m+1} & \\ \hline & 1 & P'_{10} & P'_{20} & \cdots\cdots & P'_{e,0} & P'_{e+1,0} & \bar{\eta}_0 \\ & & P'_{11} & P'_{21} & \cdots\cdots & P'_{e,1} & P'_{e+1,1} & \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\eta}_f \end{pmatrix} \\ & & & P'_{22} & \cdots\cdots & P'_{e,2} & P'_{e+1,2} & \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{f+1} \\ \vdots \\ \bar{\eta}_{2f} \end{pmatrix} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & P'_{e,e} & P'_{e+1,e} & \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{(e-1)f+1} \\ \vdots \\ \bar{\eta}_{ef} \end{pmatrix} \\ & & & & & & 1 & \bar{\eta}_{m+1} \end{array}$$

wo die P'_{ki} Systeme ganzer dyadischer Zahlen sind, deren Zeilen- und Spaltenzahl durch die oben und rechts angegebenen zu transformierenden und transformierten Basiselemente bestimmt ist, und wo die Substitutionsdeterminante

$$|P'| = |P'_{11}| \cdot \ldots \cdot |P'_{e,e}| \equiv 1 \bmod 2$$

ist. Die Einseinheiten $\eta_1, \ldots, \eta_m$ sind dabei in die e Systeme von je f Basiseinheiten für die e Grade $1, 3, \ldots, 2e-1$ eingeteilt und diese Systeme nach steigenden Graden geordnet. Bei dieser im folgenden festgehaltenen Numerierung der e Grade $1, 3, \ldots, 2e-1$ durch die Indizes $1, 2, \ldots, e$ sind also zwei Grade komplementär, wenn die Summe ihrer Indizes $e+1$ ist.

Durch eine solche Substitution P' geht in der Tat das System $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ in ein ebenso beschaffenes $\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_{m+1}$ über. Denn $\bar{\eta}_0 = \bar{\lambda}$ wird Primzahl für $\mathfrak{l}$, die f Einseinheiten eines Grades $2k-1$ gehen in f Einseinheiten desselben Grades über, die wegen $|P'_{kk}| \equiv 1 \bmod 2$ ebenfalls eine Basis für die Einseinheiten dieses Grades bilden, und $\eta_{m+1} = \eta_a$ bleibt ungeändert [1]).

Die Substitutionen P' der beschriebenen Gestalt reproduzieren sich durch Komposition. Es ist also zu zeigen, daß durch Ausübung einer Reihe geeigneter solcher P' auf das System $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$, bzw. kogredienter Transformation von $\mathfrak{L}$ durch die transponierten P („Ausübung von P auf $\mathfrak{L}$“) stets ein solches System $\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_{m+1}$ hergestellt werden kann, für das $\bar{\mathfrak{L}}$ die in dem Hauptsatz zu Beginn der Arbeit genannte Gestalt (1.) hat.

Dabei dürfen die ganzzahligen dyadischen Koeffizienten der P durchweg

---

[1]) Die allgemeinste Transformation der geforderten Eigenschaft würde auch noch η_a ändern, indem es mit beliebigen Potenzen derjenigen Potenzen der η_r multipliziert wird, die mindestens den Grad $2e$ haben. Da aber diese Potenzen mindestens die 2^1-ten, also Quadrate sind, kommt es darauf hier nicht an.

auf ihre nullten Näherungswerte 0 oder 1 reduziert angenommen werden, ebenso wie die Koeffizienten von $\mathfrak{L}$. Denn durch hinzugefügte oder fortgelassene quadratische Faktoren der η_r wird $\mathfrak{L}$ nicht beeinflußt. Die im folgenden auszuführenden Transformationen werden sich also durchweg in dem endlichen Körper 0, 1 der Restklassen mod. 2 abspielen, ohne daß dies immer ausdrücklich hervorgehoben wird.

Transformation des Fundamentalsystems.

Über die symmetrische Matrix $\mathfrak{L} = (l_{ik})$, die unserem zugrundegelegten, beliebigen Fundamentalsystem $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ entspricht, kann nach den Folgerungen (3.), (4.) aus dem Resultat von H.-H. folgende allgemeine Aussage gemacht werden:

Satz 2. *Mit der entsprechenden Zerlegung in Felder, wie oben für P', hat $\mathfrak{L}$ für jedes Fundamentalsystem $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ die Gestalt:*

$$\mathfrak{L} = (l_{ik}) = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & \cdots & L_{0,e} & 1 \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1,e} & \\ L_{20} & L_{21} & & \iddots & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ L_{e,1} & L_{e,1} & \iddots & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}; (L'_{ik} = L_{ik}).$$

Beweis: Es ist

1.) $(-1)^{l_{0,m+1}} = \left(\frac{\eta_0, \eta_{m+1}}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\lambda, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = -1$ nach (3.), also $l_{0,m+1} = l_{m+1,0} = 1$,

2.) $(-1)^{l_{i,m+1}} = \left(\frac{\eta_i, \eta_{m+1}}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_i, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ nach (3.), also $l_{i,m+1} = l_{m+1,i} = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$,

3.) $(-1)^{l_{ik}} = \left(\frac{\eta_i, \eta_k}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ nach (4.), wenn die Gradsumme von η_i und η_k den Betrag $2e$ übersteigt, die Indizessumme der betr. L_{rs} also größer als $e+1$ ist. Daher bestehen alle L_{rs} unterhalb der Nebendiagonale aus lauter Nullen.

Aus der damit als richtig erkannten Gestalt von $\mathfrak{L}$ folgt, da nach (6.) die Determinante

$$|\mathfrak{L}| = |L_{e,1}| \cdot |L_{e-1,2}| \cdots |L_{1,e}| \equiv 1 \mod 2$$

ist, daß auch die Determinanten der in der Nebendiagonale stehenden $L_{i,e+1-i}$ sämtlich $\equiv 1$ mod. 2 sind.

Den Hauptpunkt in der nun folgenden Reduktion von $\mathfrak{L}$ auf die zu Beginn genannte Normalform (1.) bildet der Nachweis des folgenden Satzes, aus dem sich dann alles weitere leicht ergeben wird:

Satz 3. *Man kann das System $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ so annehmen, daß die in der Nebendiagonale von $\mathfrak{L}$ stehenden Glieder $L_{i,e+1-i}$; $(i = 1, 2, \ldots e)$ sämtlich f-reihige Ein-*

heitsmatrizen $E_f = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *werden, und außerdem die in der Hauptdiagonale von* $\mathfrak{L}$, *d. h. in den Hauptdiagonalen der* L_{kk} *stehenden Glieder* l_{ii}

a.) *für gerades e sämtlich oder sämtlich bis auf ein einziges Null sind, je nachdem in* $k(\mathfrak{l})$ *mindestens die* 2^2*-ten Einheitswurzeln vorkommen, oder die höchste in* $k(\mathfrak{l})$ *vorkommende* 2^n*-te Einheitswurzel* -1 *ist,*

b.) *für ungerades e sämtlich Null sind (bis auf die zu Beginn des Satzes genannte f-reihige Einheitsmatrix* $L_{\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2}}$, *die für ungerades e auch in der Hauptdiagonale steht).*

Beweis:

a.) *e* gerade.

Sind dann erstens in $k(\mathfrak{l})$ mindestens die 2^2-ten Einheitswurzeln enthalten, ist also -1 Quadrat in $k(\mathfrak{l})$, so ist für jedes Fundamentalsystem $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ für jedes η_i:

$$(-1)^{l_{ii}} = \left(\frac{\eta_i, \eta_i}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_i, -1}{\mathfrak{l}}\right)^{1)} = +1, \text{ also } l_{ii} = 0,$$

sodaß in den Hauptdiagonalen der L_{kk} schon von selbst lauter Nullen stehen. Durch Anwendung der Substitution

$$(7.) \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & L^{-1}_{\frac{e}{2}, \frac{e}{2}+1} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & L^{-1}_{1,e} \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

auf $\mathfrak{L}$, die wegen $|L_{i,e+1-i}| \equiv 1$ mod. 2 sicher gebildet werden kann, erreicht man dann, wie man leicht nachrechnet, daß die in der Nebendiagonale von $\mathfrak{L}$ stehenden Glieder $L_{i,e+1-1}$ sämtlich in f-reihige Einheitsmatrizen übergehen. (Das so transformierte $\mathfrak{L}$ enthält natürlich, wie überhaupt jedes mögliche, in der Hauptdiagonale nur Nullen.) Damit ist Satz 3 in diesem einfachsten Falle bewiesen.

Ist zweitens -1 die höchste in $k(\mathfrak{l})$ vorkommende 2^n-te Einheitswurzel, also Nichtquadrat in $k(\mathfrak{l})$, so gibt es nach dem Resultat von H.-H. sicher ein Element η in $k(\mathfrak{l})$, für das

$$(8.) \qquad \left(\frac{\eta, \eta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta, -1}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

ist.

Dann kann es einmal sein, daß für jede Einseinheit ε aus $k(\mathfrak{l})$

$$(9.) \qquad \left(\frac{\varepsilon, \varepsilon}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varepsilon, -1}{\mathfrak{l}}\right) = +1$$

ist, sodaß η sicher eine Primzahl aus $k(\mathfrak{l})$ ist. Diese darf dann als Primzahl η_0 unseres

---

1) Aus $-\alpha = n(\sqrt{\alpha})$ folgt, daß für jedes α

$$\left(\frac{\alpha, -\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = +1, \text{ also } \left(\frac{\alpha, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha, -1}{\mathfrak{l}}\right)$$

ist.

Fundamentalsystems gewählt werden. Die zugehörige Matrix $\mathfrak{L}$ hat dann nach (8.) als erstes Element der Hauptdiagonale $\mathfrak{L}_{00} = l_{00} = 1$, während in den Hauptdiagonalen der folgenden L_{kk} nach (9.) sicher nur Nullen stehen, wie auch $\mathfrak{L}$ weiter transformiert werden mag. Durch Anwendung der Substitution (7.) auf $\mathfrak{L}$ erhält man also, wie vorhin, ein $\mathfrak{L}$ von der in Satz 3, a.) angegebenen Gestalt, wobei das ausgezeichnete Glied der Hauptdiagonale das erste, der Primzahl η_0 entsprechende ist.

Gibt es aber in $k(\mathfrak{l})$ Einseinheiten ε, für die

$$(10.) \qquad \left(\frac{\varepsilon, \varepsilon}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varepsilon, -1}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

ist, so sei ε_1 eine solche von möglichst hohem Grade ϱ. Da

$$-1 = 1 + 1 \quad 2 + 1 \cdot 2^2 + \cdots \quad (\mathfrak{l})$$

genau vom geraden Grade e ist, ist die Einseinheit niedrigsten Grades, die bei der oben a. S. 79 angegebenen Darstellung (2.) von -1 durch ein Fundamentalsystem mit dem Exponenten 1 auftritt, von einem Grade $\varrho' > e$. Wäre dieser Grad ϱ' der höchste überhaupt mögliche $2e$, also $-1 = \eta_a \gamma^2(\mathfrak{l})$, so wäre entgegen unserer nunmehrigen Annahme (10.) nach (3.), S. 79 für jede Einseinheit ε die Beziehung (9.) erfüllt. Es ist also $\varrho' = 2r' - 1$ einer der ungeraden Grade und

$$e + 1 \leqq 2r' - 1 \leqq 2e - 1,$$

und man kann

$$-1 = \varepsilon_1' \gamma^2(\mathfrak{l}); \quad (\varepsilon_1' \text{ genau vom Grade } 2r' - 1)$$

setzen. Der Grad ϱ von ε_1 ist dann der höchstmögliche, für den noch

$$\left(\frac{\varepsilon_1, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

sein kann, also der zu $\varrho' = 2r' - 1$ komplementäre

$$\varrho = 2e - (2r' - 1) = 2r - 1,$$

d. h.

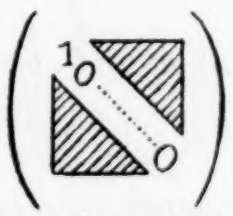
$$r + r' = e + 1 \text{ [1]}.$$

Ich beweise nun für den hier vorliegenden Fall:

Satz 4. *Man kann die beiden Basissysteme $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_f$ und $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_f'$ für die Grade $2r - 1$ und $2r' - 1$ so wählen, daß*

1.) *die aus diesen beiden Systemen entspringende Matrix $L_{r'r}$ (und folglich auch $L_{rr'} = L_{r'r}'$) der Nebendiagonale von $\mathfrak{L}$ die f-reihige Einheitsmatrix ist,*

2.) *die aus dem ersten entspringende Matrix L_{rr} der Hauptdiagonale von $\mathfrak{L}$ die Gestalt*



hat, wo die schraffierten Felder irgendwelche Glieder andeuten.

---

[1]) Offenbar sind diese beiden charakteristischen Grade $\varrho = 2r - 1$ und $\varrho' = 2r' - 1$ nicht von der Wahl des Fundamentalsystems ahhängig, sondern allein durch den Körper $k(\mathfrak{l})$ bestimmt. ϱ' läßt sich auch als höchster Exponent σ charakterisieren, für den die Kongruenz $\xi^2 \equiv -1 \bmod \mathfrak{l}^\sigma$ noch lösbar ist. Für $\varrho' = 2e$ liegt der vorher behandelte Fall vor, (daß (9.) richtig ist).

Beweis: Als erste Elemente der fraglichen beiden Systeme wähle ich die beiden soeben bestimmten Einseinheiten ε_1 und ε_1' vom Grade $2r-1$ und $2r'-1$. Für $f=1$ werden dann die zugehörigen Matrizen

$$\left.\begin{matrix} L_{r'r} = (1), \\ L_{rr} = (1), \end{matrix}\right\} \text{ wegen } \left(\frac{\varepsilon_1, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1, \varepsilon_1}{\mathfrak{l}}\right) = -1.$$

Damit ist für $f=1$ der Satz 4 bewiesen. Für $f>1$ seien $\bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_f$ und $\bar{\varepsilon}_2', \ldots, \bar{\varepsilon}_f'$ irgendwelche Einseinheiten der Grade $2r-1$ und $2r'-1$, die mit ε_1 bzw. ε_1' zusammen Basissysteme für diese Grade bilden und

$$\bar{L}_{r'r} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \cdots a_f \\ b_2 & \\ \vdots & M \\ b_f & \end{pmatrix} \text{ und } \bar{L}_{rr} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ a_2 & \ddots & \\ \vdots & & \\ a_f & \cdots & \end{pmatrix}$$

die beiden aus jenen Systemen entspringenden, zu reduzierenden Matrizen, in denen die Größen a_i wegen

$$(-1)^{a_i} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_i, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_i, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i}{\mathfrak{l}}\right); \quad (i = 2, \ldots, f)$$

übereinstimmen. Durch Anwendung der Substitutionen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_f & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \text{ auf } (\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_f)$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ b_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_f & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \text{ auf } (\varepsilon_1', \bar{\varepsilon}_2', \ldots \bar{\varepsilon}_f')$$

geht dann über:

$$\bar{L}_{r'r} \text{ in } \bar{L}_{r'r} = B\,\bar{L}_{r'r}\,A' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \text{mod. } 2$$

und

$$\bar{L}_{rr} \text{ in } L_{rr} = A\,\bar{L}_{rr}\,A' \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ mod. } 2,$$

letzteres, da sich für die neuen Elemente $\bar{\varepsilon}_i\,\varepsilon_1^{a_i}$ die Hauptdiagonale von L_{rr} aus

$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}_i\,\varepsilon_1^{a_i}, \bar{\varepsilon}_i\,\varepsilon_1^{a_i}}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_i\,\varepsilon_1^{a_i}, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_i, -1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\varepsilon_1, -1}{\mathfrak{l}}\right)^{a_i}$$

$$= \left(\frac{\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\varepsilon_1, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right)^{a_i} = (-1)^{a_i + a_i} = +1$$

bestimmt.

Die Determinante von N ist, wie die von $\bar{L}_{r'r}$, ebenfalls $\equiv 1$ mod. 2. Daher existiert N^{-1}. Transformiert man also das zweite System $\varepsilon_1', \bar{\varepsilon}_2', \ldots, \bar{\varepsilon}_f$ weiter durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}$, so ändert sich L_{rr} nicht mehr, während $\bar{\bar{L}}_{r'r}$ übergeht in

$$L_{r'r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix} \bar{\bar{L}}_{r'r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{f-1} \end{pmatrix} = E_f.$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Nunmehr läßt sich der Beweis der übrigen Behauptungen von Satz 3 für den Fall eines geraden e leicht erbringen. Erstens lassen sich nämlich die in den Hauptdiagonalen der übrigen, von L_{rr} verschiedenen L_{kk} stehenden Glieder l_{ii} sämtlich auf Nullen reduzieren. Denn ist η_i eine der Basiseinheiten vom Grade $2k-1$ und $k > r$, so ist schon von selbst nach (4.) a. S. 80

$$(-1)^{l_{ii}} = \left(\frac{\eta_i, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_i, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right) = +1, \text{ also } l_{ii} = 0,$$

da dann die Gradsumme $2k - 1 + 2r' - 1 > 2r - 1 + 2r' - 1 = 2e$ ist. Ist aber $k < r$ und

$$(-1)^{l_{ii}} = \left(\frac{\eta_i, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_i, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right) = -1, \text{ also } l_{ii} = 1,$$

so kann η_i unbeschadet seiner Eigenschaft als Basiselement für den Grad $2k-1$ durch die äquivalente Einseinheit $\bar{\eta}_i = \eta_i \varepsilon_1$ ersetzt werden, für die dann

$$\left(\frac{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_i}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\bar{\eta}_i, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\bar{\eta}_i, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_i, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\varepsilon_1, \varepsilon_1'}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)(-1) = +1,$$

also das neue $\bar{l}_{ii} = 0$ ist, und entsprechendes gilt, wenn für die Primzahl η_0

$$\left(\frac{\eta_0, \eta_0}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_0, -1}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

sein sollte.

Zweitens können durch eine entsprechende Transformation von $\mathfrak{L}$, wie oben (7.), die noch übrigen (von $L_{rr'}$ und $L_{r'r}$ verschiedenen) $L_{i,e+1-i}$ der Nebendiagonale von $\mathfrak{L}$ in f-reihige Einheitsmatrizen transformiert werden, und bei dieser Transformation bleiben, wie man sich sofort überzeugt, die im vorhergehenden reduzierten Glieder L_{rr} und $L_{r'r}$, $L_{rr'}$ und die sämtlichen L_{kk} der Hauptdiagonale ungeändert.

Damit ist der Beweis für Satz 3 im Falle eines geraden e erbracht.

b.) e ungerade.

In diesem Falle schneiden sich Haupt- und Nebendiagonale von $\mathfrak{L}$ in dem im Zentrum stehenden Glied $L_{\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2}}$, das den Einseinheiten des zu sich selbst komplementärenGrades e entspricht. Über diese Einseinheiten beweise ich folgenden Satz:

Satz 5. *Man kann das Basissystem $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_f$ für den Grad e so wählen, daß die zugehörige Matrix $L_{\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2}}$ die f-reihige Einheitsmatrix ist.*

Beweis: Da e ungerade ist, ist -1 die höchste in $k(\mathfrak{l})$ vorkommende 2^n-te Einheitswurzel [1]), also Nichtquadrat in $k(\mathfrak{l})$ und Einseinheit genau vom Grade e. Daher gibt es nach dem Resultat von H.-H. eine Einseinheit ε_1 desselben Grades e, sodaß

$$\left(\frac{\varepsilon_1, \varepsilon_1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{-1, \varepsilon_1}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

ist. Ich wähle dies ε_1 als erstes Element das Basissystems für den Grad e. Ist $f = 1$, so ist also die zugeordnete Matrix $L_{\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2}} = (1)$ und der Satz bewiesen. Für $f > 1$ kann außerdem ε_1 noch so gewählt werden, daß die beiden Einseinheiten e-ten Grades $-1, \varepsilon_1$ unabhängig voneinander [2]) sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so wäre entweder für jede weitere, von -1 unabhängige Einseinheit e-ten Grades ε:

$$\left(\frac{-1, \varepsilon}{\mathfrak{l}}\right) = +1.$$

Dann ist auch $\varepsilon\varepsilon_1$ von -1 unabhängig und

$$\left(\frac{-1, \varepsilon\varepsilon_1}{\mathfrak{l}}\right) = -1,$$

sodaß $\varepsilon\varepsilon_1$ an Stelle von ε_1 genommen werden kann. Oder aber es gäbe eine von -1 unabhängige Einseinheit e-ten Grades ε, sodaß

$$\left(\frac{-1, \varepsilon}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

ist, die dann als ε_1 genommen werden kann.

Mit Hilfe dieser letzten Bemerkung kann man nun successive die weiteren Einseinheiten $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_f$ eines Basissystems für den Grad e so finden, daß sie die Bedingungen von Satz 5 befriedigen. Ich zeige dies gleich allgemein durch Induktion.

Sei schon bewiesen, daß für $t < f$ ein System von t unabhängigen Einseinheiten e-ten Grades $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ gefunden werden kann, von denen auch -1 unabhängig ist und für die die zugehörige Matrix das t-reihige Einssystem ist. Dann beweise ich, daß man eine weitere, von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$, und falls auch noch $t + 1 < f$, sogar von $-1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ unabhängige Einseinheit ε_{t+1} finden kann, sodaß die zu $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t+1}$ gehörige Matrix das $(t+1)$-reihige Einssystem ist. Da für $t = 1$ die Einseinheit ε_1 die verlangten Forderungen befriedigt, folgt dann unmittelbar die Existenz eines Systems $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_f$ mit der in Satz 5 genannten Eigenschaft.

Zunächst existiert nach der Annahme über $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ eine von diesen unabhängige Einseinheit e-ten Grades $\bar{\varepsilon}_{t+1}$, sodaß

$$(11.) \qquad \left(\frac{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t \bar{\varepsilon}_{t+1}, \bar{\varepsilon}_{t+1}}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t, \bar{\varepsilon}_{t+1}}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

---

[1]) Siehe *K. Hensel*, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers. Dieses Journal, Bd. 146, S. 189.

[2]) D. h. unabhängig in bezug auf die Gruppe aller Einseinheiten von höherem als dem e-ten Grade, sodaß kein Produkt aus ihnen von höherem als dem e-ten Grade ist, außer wenn alle Exponenten durch 2 teilbar sind.

ist. Denn einerseits ist wegen der Unabhängigkeit von $-1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ die Einseinheit $-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t$ genau vom Grade e, sodaß nach dem Resultat von H.-H. eine Einseinheit $\bar{\varepsilon}_{t+1}$ vom Grade e existiert, die (11.) befriedigt. Wäre diese andererseits von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ abhängig, also

$$\bar{\varepsilon}_{t+1} = \varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_t^{a_t} \eta_{e+1}; \quad (\eta_{e+1} \equiv 1 \mod \mathfrak{l}^{e+1}),$$

so wäre, da nach (4.), S. 80

$$\left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t, \eta_{e+1}}{\mathfrak{l}}\right) = +1$$

ist,

$$\left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t, \bar{\varepsilon}_{t+1}}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t, \varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_t^{a_t}}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{k=1}^{t} \left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t, \varepsilon_k}{\mathfrak{l}}\right)^{a_k}$$

$$= \prod_{k=1}^{t} \left\{ \left(\frac{-1, \varepsilon_k}{\mathfrak{l}}\right)^{a_k} \prod_{i=1}^{t} \left(\frac{\varepsilon_i, \varepsilon_k}{\mathfrak{l}}\right)^{a_k} \right\}.$$

Da nun nach Annahme über die zu $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ gehörige Matrix

$$\left(\frac{\varepsilon_i, \varepsilon_k}{\mathfrak{l}}\right) = \begin{cases} +1 & \text{für } i \neq k \\ -1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

ist, würde weiter folgen:

$$\left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t, \bar{\varepsilon}_{t+1}}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{k=1}^{t} \left(\frac{\varepsilon_k, \varepsilon_k}{\mathfrak{l}}\right)^{a_k} \left(\frac{\varepsilon_k, \varepsilon_k}{\mathfrak{l}}\right)^{a_k} = +1,$$

was (11.) widerspricht. Ist ferner auch noch $t+1 < f$, so kann $\bar{\varepsilon}_{t+1}$ sogar von $-1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ unabhängig angenommen werden. Denn wäre $\bar{\varepsilon}_{t+1}$ von diesen Einheiten abhängig, so wäre entweder für jede von $-1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ unabhängige Einseinheit e-ten Grades ε, (solche existieren wegen $t+1 < f$ sicher):

$$\left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_t, \varepsilon}{\mathfrak{l}}\right) = +1.$$

Dann ist auch $\varepsilon \bar{\varepsilon}_{t+1}$ von $-1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ unabhängig und

$$\left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t, \varepsilon \bar{\varepsilon}_{t+1}}{\mathfrak{l}}\right) = -1,$$

sodaß $\varepsilon \bar{\varepsilon}_{t+1}$ an Stelle von $\bar{\varepsilon}_{t+1}$ genommen werden kann. Oder aber es gäbe eine von $-1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ unabhängige Einseinheit e-ten Grades ε, für die

$$\left(\frac{-\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t, \varepsilon}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

ist, die dann als $\bar{\varepsilon}_{t+1}$ genommen werden kann.

Sei nun

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_t \\ c_1 & \cdots & c_t & c_{t+1} \end{pmatrix}$$

die zu dem System $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t, \bar{\varepsilon}_{t+1}$ gehörige Matrix, so ist deren Determinante kongruent

$$(12.) \quad c_1^2 + \cdots + c_t^2 + c_{t+1} \equiv c_1 + \cdots + c_t + c_{t+1} \equiv 1 \mod 2,$$

da nach (11.)

$$(-1)^{c_1+\cdots+c_t+c_{t+1}} = \prod_{k=1}^{t}\left(\frac{\varepsilon_k, \bar{\varepsilon}_{t+1}}{\mathfrak{l}}\right)\cdot\left(\frac{\bar{\varepsilon}_{t+1}, \bar{\varepsilon}_{t+1}}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_t\, \bar{\varepsilon}_{t+1}, \bar{\varepsilon}_{t+1}}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

ist. Dann führt die Substitution

$$\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_1^{c_1} \cdots \varepsilon_t^{c_t}\, \bar{\varepsilon}_{t+1}$$

zu einer ebenfalls von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ und für $t+1 < f$ von $-1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ unabhängigen Einseinheit e-ten Grades ε_{t+1}, sodaß zu dem System $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}$ die Matrix gehört:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ c_1 & \cdots & c_t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_t \\ c_1 & \cdots & c_t & c_{t+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_t \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv E_{t+1} \text{ mod. } 2 \text{ (nach (12.))}.$$

Damit ist nach dem schon Gesagten Satz 5 bewiesen.

Durch ganz entsprechende Betrachtungen, wie oben für gerades e, ergibt sich nunmehr leicht der Rest der Behauptungen von Satz 3. Ist nämlich η_i irgendein Element unseres Fundamentalsystems $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ von niedrigerem als dem e-ten Grade (nur solche kommen hier in Betracht), und sollte

$$(-1)^{l_{ii}} = \left(\frac{\eta_i, \eta_i}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_i, -1}{\mathfrak{l}}\right) = -1, \text{ also } l_{ii} = 1$$

sein, so kann η_i unbeschadet seiner Eigenschaft als Basiselement für den betr. Grad (bzw. Primzahl) durch das äquivalente $\bar{\eta}_i = \eta_i\, \varepsilon_k$ ersetzt werden, wo ε_k irgendeine der eben bestimmten Basiseinheiten e-ten Grades ist. Dann ist

$$\left(\frac{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_i}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\bar{\eta}_i, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_i, -1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\varepsilon_k, -1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\eta_i, -1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\varepsilon_k, \varepsilon_k}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)\,(-1) = +1,$$

also das neue $\bar{l}_{ii} = 0$.

Transformiert man schließlich $\mathfrak{L}$ mittels der zu (7.), S. 84 analogen Substitution

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & L^{-1}_{\frac{e-1}{2}, \frac{e+3}{2}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & L^{-1}_{1,e}\ 1 \end{pmatrix},$$

so gehen die in der Nebendiagonale von $\mathfrak{L}$ stehenden Glieder $L_{1,e}$, $L_{2,e-1}, \ldots,$ $L_{\frac{e-1}{2}, \frac{e+3}{2}}$; $L_{\frac{e+3}{2}, \frac{e-1}{2}}, \ldots, L_{e,1}$ sämtlich in f-reihige Einheitsmatrizen E_f über, die an der Stelle von $L_{\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2}}$ schon stehende f-reihige Einheitsmatrix bleibt erhalten, und ebenso, wie man sich leicht überzeugt, die Eigenschaft der Hauptdiagonalen der übrigen L_{kk}, nur Nullen zu enthalten.

Damit ist der Beweis von Satz 3 auch im Falle eines ungeraden e und somit vollständig erbracht.

Das Fundamentalsystem $\eta_0, \ldots, \eta_{m+1}$ kann also in jedem Falle so gewählt werden, daß die ihm entsprechende Matrix $\mathfrak{L}$ die Gestalt hat:

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & \cdots & L_{0e} & 1 \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & \cdots & 1 & \\ L_{20} & L_{21} & & \iddots & & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \\ L_{e0} & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix},$$

wobei in den Hauptdiagonalen der $L_{00}, \ldots, L_{\left[\frac{e}{2}\right],\left[\frac{e}{2}\right]}$ im allgemeinen nur Nullen stehen, nur für gerades e und $n = 1$ in einem bestimmten L_{rr} eine einzige Eins.

Ich zeige nun letztens noch leicht, daß alle noch übrigen Glieder L_{ik} $(i \neq k)$ und auch die seitlichen Glieder der L_{kk} zum Fortfall gebracht werden können. Die zu reduzierenden L_{ik} machen die ersten $\left[\frac{e}{2}\right] + 1$ Zeilen und Spalten von $\mathfrak{L}$ aus.

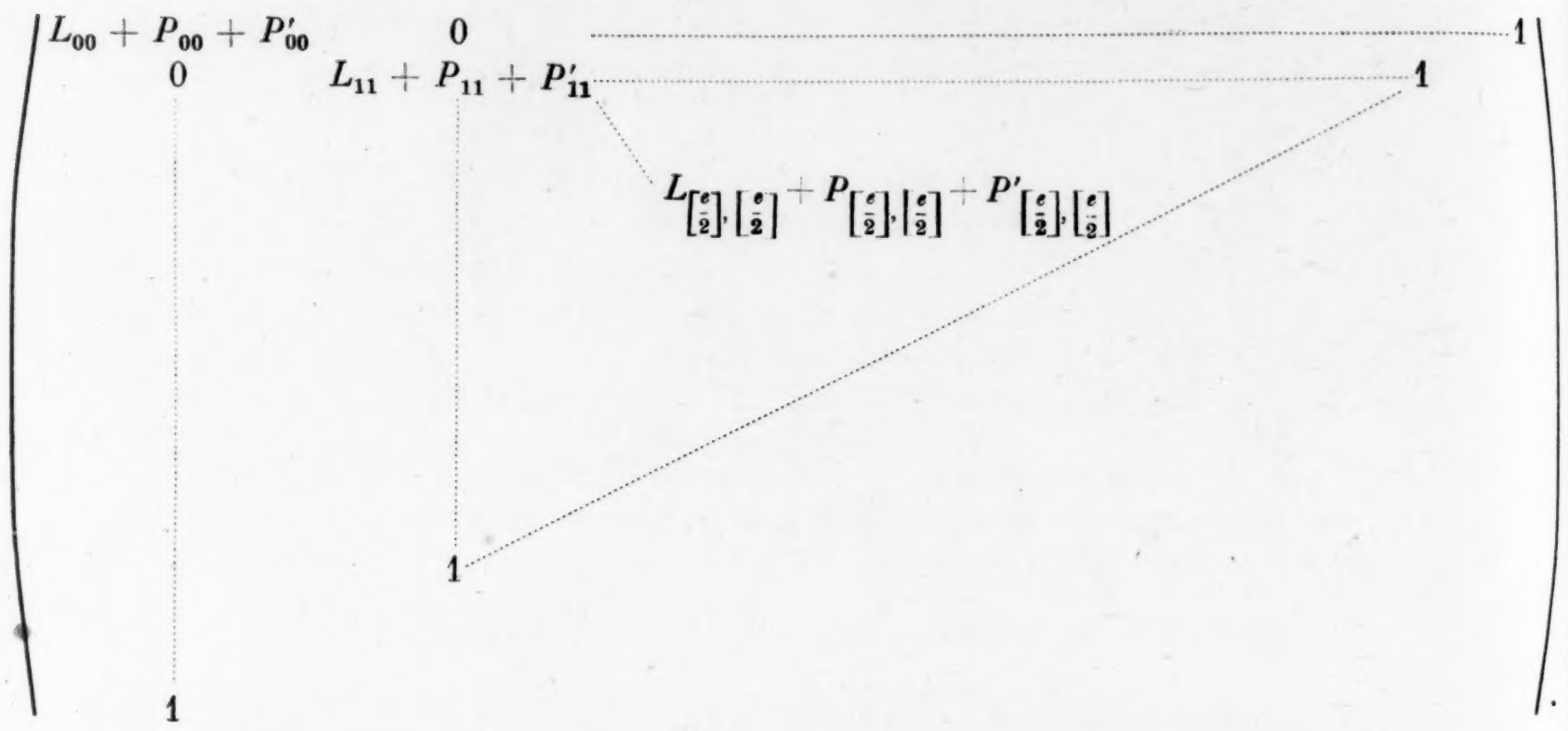
Demgemäß wende ich auf $\mathfrak{L}$ nacheinander die folgenden $\left[\frac{e}{2}\right] + 1$ Substitutionen an:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ P_{00} & L_{01} & L_{02} & \cdots & L_{0e} \quad 1 \end{pmatrix}; \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \\ 0 & P_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1,e-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}; \ldots;$$

$$P_{\left[\frac{e}{2}\right]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 0 & \cdots & P_{\left[\frac{e}{2}\right],\left[\frac{e}{2}\right]} & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

die sukzessive $\mathfrak{L}$ überführen in:

$$\begin{pmatrix} L_{00} + P_{00} + P_{00} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & L_{11} & L_{12} & \cdots & 1 \\ 0 & L_{21} & & \iddots & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} L_{00} + P_{00} + P'_{00} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & L_{11} + P_{11} + P'_{11} & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & L_{22} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\ 1 & 1 & 1 & & \end{pmatrix}; \ldots;$$



Durch passende Wahl der P_{kk} lassen sich dann noch die seitlichen Glieder der L_{kk} zu Null machen. Ist nämlich

$$L_{kk} = \left(\begin{matrix} c & 0 \\ 0 & M \\ M' & 0 \end{matrix} \right); (c = 0 \text{ oder } 1),$$

wie wir es ja schon erreicht hatten, so wähle man

$$P_{kk} = \left(\begin{matrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{matrix} \right), \text{ also } P'_{kk} = \left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ M' & 0 \end{matrix} \right).$$

Dann wird

$$L_{kk} + P_{kk} + P'_{kk} \equiv \left(\begin{matrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right) \text{ mod. } 2,$$

wie verlangt.

Damit ist jetzt $\mathfrak{L}$ genau auf die Form (1.) reduziert, wie sie in dem zu Beginn aufgestellten Hauptsatz angegeben wurde, und somit jener Hauptsatz vollständig bewiesen. Das dort mit $(e-1)\,2^{n-1}$ bezeichnete Glied der Hauptdiagonale entspricht in der Tat genau der im Laufe der Untersuchung erhaltenen, eventuellen 1 in der Hauptdiagonale, indem jene eben dann und nur dann auftritt, wenn e gerade und $n = 1$ ist, genau wie $(e-1)\,2^{n-1}$ mod. 2 betrachtet. Die genaue Angabe der

Stelle, an der dieses ausgezeichnete Glied in $\mathfrak{L}$ steht, hängt von dem Charakter der Zahl -1, (die dann Nichtquadrat in $k(\mathfrak{l})$ ist), in $k(\mathfrak{l})$ ab. Ist

$$(13.) \qquad -1 = \eta_0^{c_0}\,\eta_1^{c_1} \ldots \eta_m^{c_m}\,\eta_{m+1}^{c_{m+1}}\,\gamma^2(\mathfrak{l});\ (c_i = 0 \text{ oder } 1)$$

die Darstellung von -1 durch ein Fundamentalsystem, so entspricht, wie die Betrachtungen a. S. 85 ohne weiteres zeigen, das ausgezeichnete Glied einem solchen Basiselement, das zu dem ersten in (13.) mit nicht verschwindenden Exponenten auftretenden Glied komplementär ist. (Dabei sind $\eta_0 = \lambda$ und $\eta_{m+1} = \eta_a$ ebenfalls als komplementäre Basiselemente zu rechnen.)

Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper.

Von Herrn *Karl Rychlik* in Prag.

Einleitung.

§ 1. Die Körper und Integritätsbereiche sind Bereiche, in denen nach den aus den Elementen der Algebra bekannten Regeln für die rationalen bzw. ganzen Zahlen gerechnet wird [1]).

Man kann auch den Begriff des absoluten Betrages verallgemeinern und auf Grund desselben den Limes und die Konvergenz definieren.

Wir werden jedem Elemente a des Körpers K eine reelle Zahl $||a|| \geqq 0$ zuordnen, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

I. $||0|| = 0$, *für* $a \neq 0$ *ist* $||a|| > 0$, und wenn der triviale Fall $||0|| = 0$, $||a|| = 1$ für $a \neq 0$, ausgeschlossen werden soll: *Es gibt im Körper wenigstens ein Element* a, *für welches* $||a|| \neq 1$.

II. $||ab|| = ||a|| \cdot ||b||$.

III. $||1 + a|| \leqq 1 + ||a||$.

$||a||$ wird nach Herrn *Kürschák Bewertung* des Elementes a genannt, und ein Körper, für den eine solche Zuordnung existiert, wird als *bewerteter Körper* bezeichnet [2]).

Dann gilt: 1.) $\left\| \frac{a}{b} \right\| = \frac{||a||}{||b||}$, für $b \neq 0$; 2.) $||1|| = 1$; 3.) $||-1|| = 1$;

4.) $||-a|| = ||a||$; 5.) $||a + b|| \leqq ||a|| + ||b||$;

6.) $||a + b + c + \cdots|| \leqq ||a|| + ||b|| + ||c|| + \cdots$.

Im speziellen Falle, daß statt III die Bedingung III′ gilt: *Für* $||a|| \leqq 1$ *ist* $||1 + a|| \leqq 1$, erhalten wir *die nichtarchimedische Bewertung* [3]).

Anstatt (5.) und (6.) gilt dann: 5′.) $||a + b|| \leqq \text{Max}\,(||a||, ||b||)$, und wenn $||a|| \neq ||b||$, sogar $||a + b|| = \text{Max}\,(||a||, ||b||)$.

6′.) $||a + b + c + \cdots|| \leqq \text{Max}\,(||a||, ||b||, ||c||, \ldots)$.

Daraus folgt in diesem Falle gleich $||n|| \leqq 1$, wenn n eine ganze rationale Zahl bezeichnet.

---

[1]) *Steinitz*, Dieses Journal 137, 1910. Die Ergebnisse dieser Arbeit setze ich voraus und benutze die dort eingeführte Terminologie.

[2]) *Kürschák*, Dieses Journal 142, 1913, § 1—23.

[3]) *Ostrowski*, Acta mathem. 41, 1917.

§ 2. In einem bewerteten Körper K kann man *den Limes einer Folge* und *die konvergente Folge* ebenso definieren, wie es in der *Cantor-Meray*schen Theorie der irrationalen Zahlen üblich ist. Eine Folge von Elementen aus K, $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ hat zum Limes das Element a aus K, $a = \lim_{n=\infty} a_n$, wenn es möglich ist, für jede noch so kleine (reelle) positive Zahl ε eine ganze positive Zahl N zu finden, so daß für alle $n > N$, $||a_n - a|| < \varepsilon$ ist (d. h. $\lim_{n=\infty} ||a_n - a|| = 0$, der Limes im gewöhnlichen Sinne für reelle Zahlen verstanden).

Eine Folge von Elementen $a_1, a_2, \ldots$ aus K ist konvergent, wenn es möglich ist, für jede noch so kleine positive Zahl ε eine ganze positive Zahl N zu finden, so daß $||a_{n+k} - a_n|| < \varepsilon$ ist für alle $n > N$ und für alle ganzen positiven Zahlen k.

In nichtarchimedischen Körpern findet eine Vereinfachung statt. *Bei der Konvergenzbedingung genügt es, daß sie nur für $k = 1$ erfüllt sei*, d. h. *daß* $\lim_{n=\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ *sei.* Ist nämlich $||a_{n+1} - a_n|| < \varepsilon$ für $n > N$, dann ist auch

$$||a_{n+k} - a_n|| = ||(a_{n+k} - a_{n+k-1}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)||$$
$$\leqq \text{Max}\,(||a_{n+k} - a_{n+k-1}||, \ldots, ||a_{n+1} - a_n||) < \varepsilon.$$

Daraus folgt unmittelbar: *Die unendliche Reihe $b_1 + b_2 + \cdots b_n + \cdots$ ist in einem nichtarchimedisch bewerteten Körper dann und nur dann konvergent, wenn* $\lim_{n=\infty} b_n = 0$ *ist.*

Soll eine Folge im bewerteten Körper einen Limes besitzen, so muß sie konvergent sein. Umgekehrt besitzen aber nicht alle konvergenten Folgen einen Limes. Nennen wir *perfekt* einen Körper, in dem jede konvergente Folge einen Limes besitzt, dann existieren auch nichtperfekte Körper.

Man kann aber in einem beliebigen Körper jeder konvergenten Folge ein neues Element als deren Limes zuordnen, für diese Elemente die Gleichheit, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division definieren, so daß ein neuer Körper K' über K, *der derivierte Körper* von K, entsteht. Ist der Körper K perfekt, so ist der derivierte Körper K' identisch mit K. Für einen beliebigen Körper K ist der derivierte Körper K' perfekt, d. h. $(K')' = K'$.

§ 3. Herr *Ostrowski* hat gezeigt, daß außer den nichtarchimedisch bewerteten Körpern nur solche Körper K eine Bewertung zulassen, die mit einem Unterkörper $\overline{K}$ des Körpers aller gewöhnlichen komplexen Zahlen isomorph sind und wenn dem Elemente a aus K das Element $\bar{a}$ aus $\overline{K}$ entspricht, so ist $||a|| = |\bar{a}|^\varrho$, $0 < \varrho \leqq 1$.

Alle nichtarchimedischen Bewertungen des Körpers der rationalen Zahlen R erhalten wir auf folgende Weise: Ist p eine Primzahl, so kann jede rationale Zahl a in der Form $a = p^r\, u/v$ dargestellt werden, wo u, v ganze durch p nicht teilbare Zahlen und r eine ganze Zahl bezeichnet. Setzen wir $||a|| = c^r$, $0 < c < 1$. Der derivierte Körper R' ist dann der Körper der *Hensel*schen p-adischen Zahlen.

§ 4. Herr *Kürschák* hat sich mit der folgenden Frage beschäftigt: *Kann man die algebraische Erweiterung eines bewerteten Körpers K so bewerten, daß die Bewertung des Körpers K erhalten bleibt*? Jedes in bezug auf K algebraische Element a genügt einer Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit Koeffizienten aus K, die in K irreduzibel ist. Herr *Kürschák* macht die Festsetzung, daß *alle Wurzeln*

einer in K irreduziblen Gleichung dieselbe Bewertung erhalten sollen. Es folgt dann unmittelbar aus II., daß *das Element* α, wenn die Aufgabe überhaupt lösbar sein soll, *die Bewertung* $||\alpha|| = ||a_n||^{\frac{1}{n}}$ *erhalten muß.* Sind dann aber die Bedingungen II. und III. erfüllt? Der Beweis, daß die Bedingung II. erfüllt ist, ist für jeden bewerteten Körper leicht. Soll dagegen die Bedingung III. erfüllt sein, so muß von dem bewerteten Körper vorausgesetzt werden, daß er perfekt ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Bewertung jeder algebraischen Erweiterung des perfekten Körpers K [1]).

Bei seinem Beweise benutzt Herr *Kürschák* die Theorie der Potenzreihen und die Sätze von *Hadamard.* Es wird von ihm aber die Meinung geäußert, man könne im Falle der nichtarchimedischen Bewertung den Satz leichter beweisen durch eine Methode, welche derjenigen des Herrn *Hensel* [2]) für die algebraischen Erweiterungen des Körpers der p-adischen Zahlen nachgebildet ist. Das versuche ich in vorliegender Abhandlung. Damit ist aber auch der allgemeine Fall erledigt, wie aus den im vorigen Paragraphen angeführten Sätzen des Herrn *Ostrowski* folgt.

Endlich beweise ich, wieder durch Verallgemeinerung des von Herrn *Hensel* angewandten Vorgangs, daß der derivierte Körper K' eines algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körpers K selbst algebraisch abgeschlossen ist.

Daraus folgt dann, daß man jeden bewerteten Körper zu einem perfekten bewerteten algebraisch abgeschlossenen Körper erweitern kann.

Die ganzen Elemente, die Teilbarkeit und die Kongruenzen im bewerteten Körper.

§ 5. Betrachten wir einen bewerteten [3]) Körper K. Elemente, deren Bewertung $\leqq 1$ ist, bilden einen Integritätsbereich J: Aus $||a|| \leqq 1$, $||b|| \leqq 1$ folgt nämlich auch $||a \pm b|| \leqq \text{Max}\,(||a||, ||b||) \leqq 1$, $||ab|| = ||a|| \cdot ||b|| \leqq 1$. Elemente aus dem Integritätsbereich J werden wir als *ganze Elemente* des Körpers K bezeichnen, da jedes Element des Körpers K als Quotient von zwei Elementen aus J dargestellt werden kann. Es gilt nämlich der Satz: 1.) Ist a ein Element $\neq 0$ aus K, so ist von den zwei Elementen a und $1/a$ wenigstens das eine ganz. 2.) Sind sie beide ganz, was für Elemente, deren Bewertung 1 ist, zutrifft, dann wird das Element a eine *Einheit* des Körpers K genannt. Auch die *Teilbarkeit* können wir im bewerteten Körper K definieren. 3.) DasElement a istdurch dasElement b teilbar, wenn $a = bc$ ist, wo c ein ganzes Element aus K bedeutet, (d. h. $||a|| \leqq ||b||$ ist); für $b \neq 0$ also, wenn der Quotient a/b ganz ist. Dann gelten die Sätze: 4.) Wenn a durch b, b durch c teilbar ist, dann ist a durch c teilbar. 5.) Ist a durch d teilbar und k ganz, so ist auch ak durch d teilbar. 6.) Sind die Elemente a, b durch d teilbar, so ist auch $a \pm b$ durch d teilbar.

7.) Wenn a durch b und auch umgekehrt b durch a teilbar ist, dann werden wir die Elemente a, b als *assoziert* bezeichnen. 8.) Zwei Elemente sind dann und

---

[1]) Herr *Ostrowski* hat gezeigt (Dieses J. 147, 1917, p. 196), daß das Bewertungsproblem auch nicht anders als durch $||\alpha|| = ||a_n||^{\frac{1}{n}}$ gelöst werden kann.

[2]) *Hensel,* Theorie d. algebr. Zahlen. I. 1908, Teubner.

[3]) nichtarchimedisch wie überall im folgenden.

nur dann assoziiert, wenn sie gleiche Bewertung haben. 9.) Die Einheiten sind die mit 1 assoziierten Elemente. 10.) Der Quotient von zwei miteinander assoziierten Elementen $\neq 0$ ist eine Einheit. 11.) Für die Elemente $a, b, \ldots, c$ existiert immer ein Element, ihr *größter gemeinsamer Teiler* $(a, b, \ldots, c)$ von der Beschaffenheit, daß es ein gemeinsamer Teiler der Elemente $a, b, \ldots, c$ ist und daß jeder gemeinsame Teiler der Elemente $a, b, \ldots, c$ ein Teiler von $(a, b, \ldots, c)$ ist. Es ist $||(a, b, \ldots, c)|| = \text{Max}\,(||a||, ||b||, \ldots, ||c||)$. 12.) Ähnlich existiert ein Element, das *kleinste gemeinsame Multiplum* $[a, b, \ldots, c]$ der Elemente $a, b, \ldots, c$, welches die Eigenschaft hat, daß es durch alle Elemente $a, b, \ldots, c$ teilbar ist und daß jedes durch $a, b, \ldots, c$ teilbare Element auch durch $[a, b, \ldots, c]$ teilbar ist. Es ist $||[a, b, \ldots, c]|| = \text{Min}\,(||a||, ||b||, \ldots, ||c||)$.

§ 6. Betrachten wir in einem bewerteten Körper K die ganzen Nichteinheitselemente: ihre Bewertung ist < 1. Gibt es unter ihnen ein Element p, dessen Bewertung am größten ist, so kann man alle Elemente $\neq 0$ aus K in der Form $c\,p^r$ ausdrücken, wo c eine Einheit und r eine ganze rationale Zahl bedeutet. Für die ganzen Elemente ist dann $r \geqq 0$, für die Einheiten $r = 0$. *Beweis*: Betrachten wir die reellen Werte von $\log ||a||$, $\log ||p|| \neq 0$. Man kann setzen $\log ||a|| = r \log ||p|| + s$, wo r eine ganze rationale Zahl bedeutet und die reelle Zahl s der Bedingung $0 \leqq s < \log ||p||$ genügt. Dann ist $||a|| = ||p||^r e^s$, $1 \leqq e^s < ||p||$. Setzen wir $a = p^r c$. Dann ist $1 \leqq ||c|| < ||p||$. Es muß aber $||c|| = 1$ sein, da das Element p unter allen Elementen, deren Bewertung < 1 ist, die größte Bewertung haben soll. Das Element p hat die Eigenschaft, daß, wenn das Produkt ab durch dieses Element teilbar ist, dasselbe wenigstens für einen der Faktoren a, b zutrifft. Daher werden wir es *Primelement* nennen, und den Körper, in dem ein solches Element existiert, einen *Primelementkörper*.

§ 7. Für die *ganzen* Elemente des bewerteten Körpers K können wir die *Kongruenz* in üblicher Weise erklären. Es sei $m \neq 0$ ein ganzes Nichteinheitselement, $0 < ||m|| < 1$. Dann soll $a \equiv 0 \pmod m$ heißen, wenn a durch m teilbar ist, d. h. $||a|| \leqq ||m||$. $a \equiv b \pmod m$ bedeutet, daß $a - b \equiv 0 \pmod m$. I. Man kann leicht zeigen, daß die so eingeführte Kongruenz eine reflexive $(a \equiv a \pmod m)$, symmetrische (aus $a \equiv b \pmod m$ folgt $b \equiv a \pmod m$) und transitive (aus $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$ folgt $a \equiv c \pmod m$) Beziehung ist. Man kann also die ganzen Elemente aus K in Klassen einteilen, indem man die miteinander (mod m) kongruenten Elemente in eine und dieselbe Klasse zusammenfaßt. IIα.) Wenn $a \equiv b \pmod m$, so ist auch $a \equiv b \pmod n$, wenn n einen Teiler von m bedeutet ($||m|| \leqq ||n||$). Daraus folgt gleich: β.) Ist m assoziiert mit n, so folgt aus $a \equiv b \pmod m$ auch $a \equiv b \pmod n$ und umgekehrt. γ.) Wenn $a \equiv b \pmod h$ und auch $\pmod k, \ldots, \pmod l$ ist, so ist auch $a \equiv b \pmod m$, wo $m = [h, k, \ldots, l]$, also (§ 5, 12) $||m|| = \text{Min}\,(||h||, ||k||, \ldots, ||l||)$. δ.) Ist $a \equiv b \pmod h$, $c \equiv d \pmod k, \ldots, e \equiv f \pmod l$, so ist auch $a \equiv b$, $c \equiv d, \ldots, e \equiv f \pmod m$, wo $m = (h, k, \ldots, l)$ also $||m|| = \text{Max}\,(||h||, ||k||, \ldots, ||l||)$. III. Weiter folgt aus den Kongruenzen $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, daß α.) $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$, β.) $ac \equiv bd \pmod m$. γ.) Aus der Kongruenz $ae \equiv be \pmod m$ folgt $a \equiv b \pmod m$, wenn e ein Einheitselement ist. Man kann also für die Klassen (mod m)

die Addition, Subtraktion und Multiplikation definieren und erhält auf diese Weise im allgemeinen einen Ring (und speziell einen Körper): den ganzen Nichteinheitselementen des Körpers K entsprechen dann die Nullteiler des Ringes, den Einheiten des Körpers K die regulären Elemente des Ringes.

§ 8. Wir werden jetzt *die Kongruenz im engeren Sinne* für die *ganzen* Elemente aus K betrachten. Es sei $m \neq 0$ ein ganzes Element: $0 < ||m|| \leqq 1$. Dann definieren wir $a \equiv 0 \pmod{m}^*$, wenn $||a|| < ||m||$; $a \equiv b \pmod{m}^*$, wenn $a - b \equiv 0 \pmod{m}^*$. Für die Kongruenz $(\mathrm{mod}\ m)^*$ gelten Sätze, die denen $(\mathrm{mod}\ m)$ ganz analog sind. Man kann sie leicht entweder direkt beweisen oder auf Grund der Sätze: Aus $a \equiv b \pmod{m}^*$ folgt $a \equiv b \pmod{n}$, wo $||n|| < ||m||$ und umgekehrt. Um so mehr folgt aus $a \equiv b \pmod{m}^*$, daß auch $a \equiv b \pmod{m}$ ist. Wir werden z. B. den Satz III* β.) beweisen: Aus den Kongruenzen 1.) $a \equiv b \pmod{m}^*$, 2.) $c \equiv d \pmod{m}^*$, folgt 3.) $ac \equiv bd \pmod{m}^*$.

1. *Beweis.* 1.), 2.) bedeuten, daß $||a - b|| < ||m||$, $||c - d|| < ||m||$. Dann ist $||ac - bd|| = ||(a - b)\ d + (c - d)\ b + (a - b)\ (c - d)||$ $\leqq \mathrm{Max}\ (||a - b|| \cdot ||d||, ||c - d|| \cdot ||b||, ||a - b|| \cdot ||c - d||) < ||m||$, woraus gleich 3.) folgt.

2. *Beweis.* 1.), 2.) bedeuten, daß $a \equiv b \pmod{p}$, $c \equiv d \pmod{q}$, wo $||p|| < ||m||$, $||q|| < ||m||$. Daraus folgt nach II. γ.) 4.) $a \equiv b \pmod{r}$, 5.) $c \equiv d \pmod{r}$, wo $r = (p, q)$, d. h. $||r|| = \mathrm{Max}\ (||p||, ||q||$, so daß $||r|| < ||m||$. Aus 4.), 5.) folgt dann nach III. β) $ac \equiv bd \pmod{r}$ und daraus 3.).

Wir werden später öfters den folgenden Satz benötigen: *Ist* $a \equiv b \pmod{m}^*$ *und ist* a *assoziiert mit* m, *so ist auch* b *mit* m *assoziiert*, $||a|| = ||b|| = ||m||$. Aus $||a - b|| < ||m||$, $||a|| = ||m||$ folgt nämlich, da $||a - b|| \neq ||a||$, daß $||b|| = ||(a - b) - a|| = \mathrm{Max}\ (||a - b||, ||a||)$, d. h. $||b|| = ||a||$, w. z. b. w. Man kann weiter leicht beweisen, daß *die Klassen* $(\mathrm{mod}\ 1)^*$ *einen Körper bilden.* Es genügt zu zeigen, daß die Kongruenz $ax \equiv b \pmod{1}^*$ eine und nur eine Lösung $(\mathrm{mod}\ 1)^*$ besitzt, falls nicht $a \equiv 0 \pmod{1}^*$ ist. Aus der letzten Bedingung folgt nämlich, daß a eine Einheit ist, so daß nach III* γ), wenn die Kongruenz $ax \equiv b \pmod{1}^*$ erfüllt sein soll, die Kongruenz $x \equiv b/a \pmod{1}^*$ gelten muß. Auch die Umkehrung ist leicht einzusehen, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Für einen bewerteten Primelementkörper ist die Kongruenz $(\mathrm{mod}\ p^r)^*$ identisch mit der Kongruenz $(\mathrm{mod}\ p^{r+1})$ und speziell die Kongruenz $(\mathrm{mod}\ 1)^*$ identisch mit der Kongruenz $(\mathrm{mod}\ p)$. Die Klassen $(\mathrm{mod}\ p)$ bilden also einen Körper.

Die Polynome mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper. Ein Hilfssatz über die Resultante von zwei solchen Polynomen.

§ 9. Wir werden jetzt die ganzen rationalen Funktionen einer Veränderlichen x, $f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$ mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper K (Polynome aus K) betrachten.

Ein Polynom aus K ist *primitiv*, wenn der größte gemeinsame Teiler aller Koeffizienten eine Einheit ist, was dann und nur dann zutrifft, wenn seine Koeffizienten ganz sind und einer von ihnen eine Einheit ist. Ein beliebiges Polynom

aus K kann in der Form $f(x) = d\, f_0(x)$ dargestellt werden, wo d den größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten und $f_0(x)$ ein primitives Polynom bedeutet. Soll nun das Polynom $f(x)$ ganze Koeffizienten haben, so muß d ganz sein, $||d|| \leqq 1$; diese Bedingung ist auch hinreichend.

Wir werden zwei Polynome mit ganzen Koeffizienten aus K *kongruent* (mod m), bzw. (mod m)* nennen, falls dieselben Kongruenzen für die entsprechenden Koeffizienten beider Polynome gelten. Ein Polynom $f_0(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus K ist dann und nur dann primitiv, falls es nicht $\equiv 0 \pmod 1)^*$ ist, so daß man für ein primitives Polynom $f(x) \equiv f_0^*(x) \pmod 1)^*$ schreiben kann, wobei $f_0^*(x) = a_0^* x^\nu + a_1^* x^{\nu-1} + \cdots + a_\nu^*$, $a_0^* \not\equiv 0$. Ist $g_0(x)$ ein anderes primitives Polynom, so daß $g_0(x) \equiv g_0^*(x) \pmod 1)^*$, $g_0^*(x) = b_0^* x^\mu + \cdots + b_\mu^*$, $b_0^* \not\equiv 0$, dann gilt für das Produkt der beiden Polynome

$$f_0(x)\, g_0(x) \equiv f_0^*(x)\, g_0^*(x) \equiv a_0^*\, b_0^*\, x^{\mu+\nu} + \cdots,\quad a_0^*\, b_0^* \not\equiv 0,$$

woraus man sieht, daß es wieder ein primitives Polynom ist. Es gilt also der Satz: *Das Produkt von zwei primitiven Polynomen aus einem bewerteten Körper K ist wieder ein primitives Polynom aus K.*

Weiter gilt der Satz: *Ist ein primitives Polynom aus K in diesem Körper zerlegbar, so läßt es sich in primitive Polynome aus K zerlegen.*

Es genügt, den Beweis für den Fall zu führen, daß das primitive Polynom $f_0(x)$ in zwei Faktoren aus K zerfällt, $f_0(x) = g(x)\, h(x)$. Dann kann man schreiben $g(x) = a\, g_0(x)$, $h(x) = b h_0(x)$, wo $g_0(x)$, $h_0(x)$ primitive Polynome sind. Also ist $f_0(x) = ab\, g_0(x)\, h_0(x)$. $g_0(x)\, h_0(x)$ ist nach dem vorigen Satze ein primitives Polynom, so daß ab eine Einheit ist, womit der Satz bewiesen ist. Ein Polynom von der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ mit ganzen Koeffizienten aus K ist gewiß primitiv. Aus dem vorhergehenden Satze folgt dann, daß, wenn ein solches Polynom zerlegbar ist, es in Faktoren von ähnlicher Form zerlegt werden kann, bei denen also der Koeffizient der höchsten Potenz von x gleich 1 und die übrigen Koeffizienten ganz sind.

§ 10. Im folgenden werden wir einige Sätze über die Resultante und Diskriminante benötigen [1]).

Ich führe nur den folgenden Satz [2]) mit seinem Beweise ausdrücklich an:

Sind $g(x)$, $h(x)$ zwei teilerfremde Polynome mit ganzen Koeffizienten aus einem bewerteten Körper K, vom μ-ten und ν-ten Grade, (ihre Resultante r ist also ein von Null verschiedenes Element aus K), so kann jedes Polynom $F(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus K, dessen Grad kleiner als $\mu + \nu$ ist, eindeutig in der Form 1.) $r\, F(x) = g(x)\, h_1(x) + h(x)\, g_1(x)$ *dargestellt werden, wobei die Grade der Polynome $g_1(x)$, $h_1(x)$ kleiner als μ bzw. ν und ihre Koeffizienten ganze Elemente aus K sind.*

Beweis. Es sei

$$g(x) = a_0 x^\mu + \cdots + a_\mu, \qquad g_1(x) = a_0' x^{\mu-1} + \cdots + a_{\mu-1}',$$
$$h(x) = b_0 x^\nu + \cdots + b_\nu, \qquad h_1(x) = b_0' x^{\nu-1} + \cdots + b_{\nu-1}'.$$

Vergleicht man die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten

---

[1]) Siehe z. B. *Hensel*, a. a. O. p. 54—61.

[2]) Vergleiche *Hensel*, a. a. O. p. 63.

der Identität 1.), so erhält man $\mu + \nu$ lineare Gleichungen für $\mu + \nu$ Unbekannte a_i', b_k'

$$\begin{array}{llll} a_0 b_0' + & & + b_0 a_0' & = c_0 r \\ a_1 b_0' + a_0 b_1' & & + b_1 a_0' + b_0 a_1' & = c_1 r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Die Determinante dieses Systems ist gerade die Resultante $R(g, h) = r$, also $\neq 0$, so daß a_i', b_k' eindeutig bestimmt werden können, und zwar als lineare homogene Funktionen von c_l mit ganzen Koeffizienten aus K. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Zerlegung der Polynome in einem bewerteten perfekten Körper[1]).

§ 11. *Gilt für ein Polynom $f(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus einem bewerteten perfekten Körper K die Kongruenz* 1.) $f(x) \equiv g_0(x)\, h_0(x) \pmod{r^2}$ *, *wo $g_0(x)$, $h_0(x)$ Polynome mit ganzen Koeffizienten aus K vom μ-ten* bzw. *ν-ten Grade ($\mu, \nu \geqq 1$) sind und* 2'.) $r = R(g_0, h_0) \neq 0$ *ihre Resultante bezeichnet (oder wenigstens r mit $R(g_0, h_0)$ assoziiert ist* 2.) $\|r\| = \|R(g_0, h_0)\|$), *so zerfällt $f(x)$ auch in K:* 3.) $f(x) = g(x)\, h(x)$, *wo $g(x)$, $h(x)$ zwei Polynome mit ganzen Koeffizienten aus K bedeuten, deren Grade μ bzw. ν sind und die die Kongruenzen* 4.) $g(x) \equiv g_0(x)$, $h(x) \equiv h_0(x) \pmod{r}$* *erfüllen. Endlich ist $R(g, h)$ assoziiert mit r,* 5.) $\|R(g, h)\| = \|r\|$ [2]).

Aus 1.) folgt die Existenz eines ganzen Nichteinheitselementes m, $\|m\| < 1$, so daß 6.) $f(x) \equiv g_0(x)\, h_0(x) \pmod{m r^2}$. Zuerst beweisen wir den Hilfssatz: *Aus* 6.) $f(x) \equiv g_0(x)\, h_0(x) \pmod{m r^2}$ *und* 2.) $\|R(g_0, h_0)\| = \|r\|$ *folgt die Existenz von zwei Polynomen $\bar{g}_1(x)$, $\bar{h}_1(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus K von Graden höchstens $\mu - 1$ bzw. $\nu - 1$, so daß, wenn wir* 7.) $g_1(x) = g_0(x) + m r\, \bar{g}_1(x)$, $h_1(x) = h_0(x) + m r\, \bar{h}_1(x)$ *setzen, die Kongruenz* 8.) $f(x) \equiv g_1(x)\, h_1(x) \pmod{m^2 r^2}$ *erfüllt ist und die Resultante $R(g_1, h_1)$ mit r assoziiert ist,* 9.) $\|R(g_1, h_1)\| = \|r\|$.

Aus 6.) folgt, daß 10.) $f(x) = g_0(x)\, h_0(x) + m r^2 F_0(x)$, wo $F_0(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus R bedeutet. Nach dem Hilfssatze am Schlusse des vorigen Paragraphen kann man die Polynome $\bar{g}_1(x)$, $\bar{h}_1(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus K, von Graden höchstens $\mu - 1$ bzw. $\nu - 1$ bestimmen, so daß

$$(11.) \qquad r\, F_0(x) = g_0(x)\, \bar{h}_1(x) + h_0(x)\, \bar{g}_1(x).$$

Aus 10.) und 11.) folgt

$$(12.) \qquad f(x) = g_0(x)\, h_0(x) + mr\, (g_0(x)\, \bar{h}_1(x) + h_0(x)\, \bar{g}_1(x)).$$

Setzen wir 7.) $g_1(x) = g_0(x) + mr\, \bar{g}_1(x)$, $h_1(x) = h_0(x) + mr\, \bar{h}_2(x)$.
Das Produkt

$$g_1(x)\, h_1(x) = g_0(x)\, h_0(x) + mr\, (g_0(x)\, \bar{h}_1(x) + h_0(x)\, \bar{g}_1(x)) + m^2 r^2\, \bar{g}_1(x)\, \bar{h}_1(x)$$

---

[1]) Zum § 11—16 vgl. *Hensel* p. 66—80.

[2]) Vgl. *Hensel*, S. 71 oben. Aus dem Spezialfalle für $\|r\| = 1$ kann leicht folgender Satz gefolgert werden:

Ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus einem perfekten bewerteten Körper K ist gewiß reduzibel, wenn es (mod 1) in voneinander verschiedene Faktoren zerfällt. Ein irreduzibles Polynom aus K ist also (mod 1)* entweder wieder irreduzibel oder die Potenz eines (mod 1)* irreduziblen Polynoms.* Vgl. *Hensel* S. 79.

ist dann nach 12.) $\equiv f(x) \pmod{m^2 r^2}$, so daß 8.) gilt. Aus 7.) folgt $R(g_1, h_1) \equiv R(g_0, h_0) \pmod{r}$*, und da $R(g_0, h_0)$ assoziiert mit r ist, so ist auch $||R(g_1, h_1)|| = ||r||$; es gilt also auch 9.), womit der Hilfssatz vollständig bewiesen ist. Auf Grund von 8.) und 9.) können wir weiter die Polynome $\bar{g}_2(x)$, $\bar{h}_2(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus K und von Graden höchstens $\mu - 1$ bzw. $\nu - 1$ bestimmen, so daß, wenn wir setzen

$$g_2(x) = g_1(x) + m^2 r\, \bar{g}_2(x) = g_0(x) + mr\, \bar{g}_1(x) + m^2 r\, \bar{g}_2(x),$$
$$h_2(x) = h_1(x) + m^2 r\, \bar{h}_2(x) = h_0(x) + mr\, \bar{h}_1(x) + m^2 r\, \bar{h}_2(x),$$

die Kongruenz $f(x) \equiv g_2(x)\, h_2(x) \pmod{m^2 r^2}$ gilt und $||R(g_2, h_2)|| = ||r||$ ist.

Auf diese Weise fortfahrend kommen wir zu folgendem Resultate: Für jede ganze positive Zahl k können zwei Polynome mit ganzen Koeffizienten aus K und von Graden höchstens $\mu - 1$ bzw. $\nu - 1$ bestimmt werden, so daß, wenn

(13.) $$g_k(x) = g_{k-1}(x) + m^{2^{k-1}} r\, \bar{g}_k(x)$$
$$= g_0(x) + mr\, \bar{g}_1(x) + m^2 r\, \bar{g}_2(x) + m^4 r\, \bar{g}_3(x) + \cdots + m^{2^{k-1}} r\, \bar{g}_k(x)$$

und analog für $h_k(x)$ gesetzt wird, die Kongruenz

(14.) $$f(x) \equiv g_k(x)\, h_k(x) \pmod{m^{2^k} r^2}$$

gilt und

(15.) $$||R(g_k, h_k)|| = ||r|| \text{ ist.}$$

Da $||m|| < 1$, so ist $\lim\limits_{k=\infty} m^{2^k} = 0$. Es konvergiert also nach § 2 die unendliche Reihe $g_0(x) + mr\, \bar{g}_1(x) + m^2 r\, \bar{g}_2(x) + \cdots$ und nach 13.) ist ihre Summe gleich $\lim\limits_{k=\infty} g_k(x)$. Bezeichnen wir diesen Limes $g(x)$, so ist $g(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus K, (da der Körper K als perfekt vorausgesetzt wird). $g(x)$ ist vom μ-ten Grade, da die Grade der Polynome $\bar{g}_1(x)$, $\bar{g}_2(x)$. . . . höchstens $\mu - 1$ sind, und es gilt für $g(x)$ die Kongruenz $g(x) \equiv g_0(x) \pmod{mr}$, d. h. auch $\pmod{r}$*. Ähnlich kann die Konvergenz von $\lim\limits_{k=\infty} h_k(x) = h(x)$ gefolgert werden. $h(x)$ ist dann ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus K vom ν-ten Grade, welches die Kongruenz $h(x) \equiv h_0(x) \pmod{r}$* erfüllt. Somit ist 4.) bewiesen. Aus 14.) folgt $f(x) = \lim\limits_{k=\infty} g_k(x)\, h_k(x) = g(x)\, h(x)$, also 3.). Aus 4.) folgt $R(g, h) \equiv R(g_0, h_0) \pmod{r}$*, und daraus (nach § 10) endlich 5.). Damit ist der Beweis des Satzes vollständig erledigt.

§ 12. *Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus einem bewerteten perfekten Körper K. Ist die Diskriminante von $f(x)$, $D(f(x)) = D$ von Null verschieden, so zerfällt $f(x)$ dann und nur dann in Faktoren niedrigeren Grades aus K, wenn $f(x) \pmod{D}$* zerfällt, und zwar entspricht jeder Zerlegung* 1.) $f(x) \equiv g_0(x)\, h_0(x) \pmod{D}$* *eindeutig eine Zerlegung von $f(x)$ in K:* 2.) $f(x) = g(x)\, h(x)$, *so daß*

3.) $$g(x) \equiv g_0(x),\ h(x) \equiv h_0(x) \pmod{1}^*.$$

Aus 1.) folgt

$$D(f(x)) = D \equiv \pm D(g_0)\, D(h_0)\, (R(g_0, h_0))^2 \pmod{D}^*,$$

so daß

$$||D|| = ||D(g_0)|| \cdot ||D(h_0)|| \cdot ||R(g_0, h_0)||^2.$$

Da

$$||D(g_0)|| \leqq 1,\ ||D(h_0)|| \leqq 1,$$

so wird $||D|| \leqq ||r^2||$ sein, wo r für $R(g_0, h_0)$ gesetzt wurde. Aus der Kongruenz 1.) folgt dann um so mehr, daß $f(x) \equiv g_0(x)\ h_0(x) \pmod{r^2}$* ist. Benutzen wir den Satz aus dem vorigen Paragraphen. Wir erhalten die Zerlegung $f(x) = g(x)\ h(x)$, $g(x) \equiv g_0(x)$, $h(x) \equiv h_0(x) \pmod{r}$*, also um so mehr $g(x) \equiv g_0(x)$, $h(x) \equiv h_0(x) \pmod{1}$*.

§ 13. Auf Grund des am Anfange des vorigen Paragraphen angeführten Satzes werden wir den folgenden, für das Weitere sehr wichtigen Satz beweisen:

Es sei $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ *ein primitives Polynom aus einem bewerteten perfekten Körper K. Setzen wir voraus, daß* $f(x)$ *entweder irreduzibel oder die Potenz eines irreduziblen Polynoms ist. Ist dann einer der Randkoeffizienten* (a_0 *oder* a_n) *ein ganzes Nichteinheitselement, so sind auch alle inneren Koeffizienten ganze Nichteinheitselemente (und der andere Randkoeffizient ist eine Einheit)* [1]).

Beim Beweise dieses Satzes werden wir voraussetzen, daß a_n ein ganzes Nichteinheitselement sei, $||a_n|| < 1$. Wäre $||a_0|| < 1$, so würde es genügen, statt $f(x)$ das Polynom $x^n f(1/x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ zu betrachten, welches auch entweder irreduzibel oder die Potenz eines irreduziblen Polynoms ist und bei welchem die Bewertung des Absolutgliedes < 1 ist. Sei also schon $||a_n|| < 1$. Machen wir die Annahme, alle inneren Koeffizienten hätten nicht die Bewertung < 1. In der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sei a_r die letzte Einheit, also $||a_r|| = 1$, $1 \leqq r \leqq n-1$. Dann ist $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_r x^{n-r} \equiv (a_0 x^r + \cdots + a_r)\ x^{n-r} \pmod{1}$*, wo $a_r \not\equiv 0 \pmod{1}$*, d. h. $f(x) \equiv g_0(x)\ h_0(x) \pmod{1}$*, wo

$$g_0(x) = a_0 x^r + \cdots + a_r, \quad h_0(x) = x^{n-r}.$$

Der größte gemeinsame Teiler der Polynome $g_0(x)$, $x^{n-r} \pmod{1}$*, $(g_0(x), x^{n-r})$ ist ein Teiler von $(g_0^{n-r}, x^{n-r}) \equiv (g_0, x)^{n-r} \pmod{1}$*. Aber $(g_0, x) \equiv (a_0, x) \equiv 1 \pmod{1}$*, so daß die Polynome $g_0(x)$, $h_0(x)$ relativ prim $\pmod{1}$* sind. Aus dieser Zerlegung würde nach dem § 11 folgen, daß $f(x) = g(x)\ h(x)$, wo $g(x) \equiv g_0(x) \pmod{1}$*, $h(x) \equiv h_0(x) \pmod{1}$*. Da $g_0(x) = h_0(x) \pmod{1}$*, so wäre $g(x) \neq h(x)$, so daß $f(x)$ in zwei verschiedene Faktoren zerfallen würde, was der Voraussetzung widerspricht. Es muß also wirklich $||a_1|| < 1$, $||a_2|| < 1, \ldots ||a_{n-1}|| < 1$ sein, wie zu beweisen war.

Die ganzen algebraischen Elemente in bezug auf einen bewerteten Körper. Der Fall des bewerteten perfekten Körpers.

§ 14. α werden wir *ein ganzes algebraisches Element in bezug auf einen bewerteten Körper K* nennen, wenn es wenigstens einer Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit ganzen Koeffizienten aus K genügt. Dann können wir gleich den Satz beweisen: *Ein ganzes algebraisches Element in bezug auf K, welches in K liegt, ist ein ganzes Element aus K.* Setzen wir voraus, α genüge der Gleichung mit

---

[1]) Vgl. *Hensel* S. 74. Nennt man *Eisensteinsches Polynom* ein Polynom aus einem bewerteten Körper, dessen Koeffizienten die Bedingungen $||a_n|| = 1$, $||a_1||, ||a_2||, \ldots ||a_\nu|| < 1$ erfüllen, so ist aus dem angeführten Satze gleich ersichtlich, daß *ein primitives Polynom aus einem bewerteten perfekten Körper, dessen Absolutglied keine Einheit ist, ein Eisensteinsches Polynom sein muß.* Ein *Eisenstein*sches Polynom aus jedem bewerteten Körper, wenn es reduzibel ist, zerfällt wieder in *Eisenstein*sche Polynome. Vgl. *Hensel* S. 75. Für die *Eisenstein*schen Polynome im bewerteten Primelementkörper gelten die auf S. 76 oben angeführten Sätze.

ganzen Koeffizienten aus K: $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_r = 0$ und sei ein nicht ganzes Element aus K, also $||\alpha|| < 1$. Wird $1/\alpha = \beta$ gesetzt, so daß $||\beta|| < 1$, so würde β die Gleichung $1 + a_1 \beta + a_2 \beta^2 + \cdots + a_n \beta^n = 0$ erfüllen, was unmöglich ist, da daraus $1 \equiv 0 \pmod 1$* folgen würde.

Führen wir noch einige Sätze an, deren Beweise ganz analog denjenigen für ganze algebraische Zahlen sind: *Sind α, β ganze algebraische Elemente in bezug auf K, so gilt dasselbe von ihrer Summe $\alpha + \beta$, Differenz $\alpha - \beta$ und Produkte $\alpha\beta$. Die ganzen algebraischen Elemente in bezug auf K bilden einen Integritätsbereich. Ein nicht ganzes algebraisches Element kann als Quotient von zwei ganzen algebraischen Elementen dargestellt werden, (als Nenner kann sogar ein Element aus K gewählt werden).*

Wir haben ein ganzes algebraisches Element in bezug auf K durch die Bedingung definiert, daß eine aus den unendlich vielen Gleichungen aus K, denen es genügt, die Form hat $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, wo $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ganze Elemente aus K sind. Man kann aber beweisen, daß α dann und nur dann ein ganzes algebraisches Element ist, wenn die Gleichung niedrigsten Grades, der es genügt (und die irreduzibel ist), dieselbe Form hat.

Endlich erwähnen wir noch den Satz: *Die Wurzeln einer Gleichung $x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \cdots + \alpha_m = 0$, deren Koeffizienten ganze algebraische Elemente in bezug auf K sind, sind auch algebraisch ganz in bezug auf K.*

Jetzt können wir auf ganze algebraische Elemente einige der Definitionen und Sätze aus §5 übertragen. Sind ε und $1/\varepsilon$ beide ganz, so werden wir ε ein algebraisches Einheitselement in bezug auf K nennen. Die Teilbarkeit kann man durch 3.) definieren. Es gelten dann die Sätze 4.), 5.) 6.). Die assoziierten Elemente kann man durch 7.) definieren und es gilt 9.), 10.).

Man kann leicht einsehen, daß die irreduzible Gleichung, der ein algebraisches Einheitselement in bezug auf K genügt, die Form hat $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Elemente aus K und a_n eine Einheit ist.

§ 15. Wir werden jetzt den Fall betrachten, wo der bewertete Körper K perfekt ist. Dann gilt der Satz:

Das Element α, welches im bewerteten perfekten Körper K der irreduziblen Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ genügt, ist dann und nur dann ganz, wenn das Absolutglied a_n in K ganz ist.

Es ist leicht ersichtlich, daß diese Bedingung notwendig ist. Wir werden beweisen, daß sie auch genügt, d. h., daß die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ganz sind, wenn nur a_n ganz ist.

Setzen wir voraus, einer der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ wäre nicht ganz, hätte also die Bewertung > 1. Bestimmen wir ein Element a aus K durch die Bedingung $||a|| = \mathrm{Max}\,(||a_1||, \ldots, ||a_n||)$. Dann wäre $||a|| > 1$, $||1/a|| < 1$. Das Polynom $\frac{1}{a}x^n + \frac{a_1}{a} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{a}$ wäre gewiß primitiv, da es ganze Koeffizienten hätte und unter ihnen ein Einheitselement. Es wäre also ein irreduzibles primitives Polynom, in dem der Randkoeffizient $1/a$ die Bewertung < 1 hätte, und

einer der inneren Koeffizienten eine Einheit wäre, im Widerspruch mit dem Satze aus § 13. Es müssen also die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ganz sein, w. z. b. w.

Für ein algebraisches Einheitselement ist a_n eine Einheit aus K, $||a_n|| = 1$; für ein ganzes Nichteinheitselement ist $||a_n|| < 1$, und nach dem Satze aus § 13 ist dann auch $||a_1|| < 1, \ldots, ||a_{n-1}|| < 1$.

Die Bewertung der Elemente, welche algebraisch in bezug auf einen bewerteten Körper sind.

§ 16. Wir werden uns jetzt mit der Bewertung der Elemente, die algebraisch in bezug auf einen bewerteten Körper sind, beschäftigen.

Wenn das Element α der in K irreduziblen Gleichung $x^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ genügt, so werden wir $||\alpha|| = ||a_n||^{\frac{1}{n}}$ setzen (s. § 4). Die Bedingung I in § 1 ist erfüllt. Wie ist es aber mit den Bedingungen II′: $||\alpha\beta|| = ||\alpha|| \cdot ||\beta||$ und III′: $||1 + \alpha|| \leqq 1$ für $||\alpha|| < 1$?

§ 17. *Die Bedingung* II′ *ist erfüllt, auch wenn wir nicht verlangen, daß K perfekt sei.*

Zuerst werden wir es beweisen für den Fall, daß die Elemente α, β von erster Art in bezug auf K sind (d. h. daß die irreduziblen Gleichungen, denen diese Elemente genügen, nur einfache Wurzeln haben [1]). Betrachten wir den Körper $L = K(\alpha, \beta)$, der aus K durch die Adjunktion der Elemente α, β entsteht. Er ist einfach und von der ersten Art: es existiert in ihm ein primitives Element ϑ, so daß $L = K(\alpha, \beta) = K(\vartheta)$. Die irreduzible Gleichung mit einfachen Wurzeln, der ϑ in K genügt, sei vom Grade r; ihre übrigen Wurzeln seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{r-1}$. Ein beliebiges Element δ aus L läßt sich als rationale Funktion von ϑ mit Koeffizienten aus K ausdrücken $\delta = \varphi(\vartheta)$. Die konjugierten Werte von δ sind dann $\delta = \varphi(\vartheta)$, $\delta_1 = \varphi(\vartheta_1), \ldots, \delta_{r-1} = \varphi(\vartheta_{r-1})$ und ihr Produkt $N(\delta) = \delta\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{r-1}$ ist die Norm von δ. δ genügt der Gleichung $N(x - \delta) = 0$, deren linke Seite ein irreduzibles Polynom oder die Potenz eines solchen Polynoms ist. Dann ist $||\delta|| = ||N(\delta)||^{\frac{1}{r}}$. Das ist evident, wenn $N(x - \delta)$ irreduzibel ist. Ist es eine Potenz des irreduziblen Polynoms $N(x - \delta) = (x^\mu + d_1 x^{\mu-1} + \cdots + d_\mu)^\nu$, $(\mu\nu = r)$, so ist $||\delta|| = ||d_\mu||^{\frac{1}{\mu}} = ||d_\mu^\nu||^{\frac{1}{r}}$, also wieder $= ||N(\delta)||^{\frac{1}{r}}$. Da nun $N(\alpha \cdot \beta) = N\alpha \cdot N\beta$, so ist auch $||N(\alpha\beta)||^{\frac{1}{r}} = ||N(\alpha)||^{\frac{1}{r}} \cdot ||N\beta||^{\frac{1}{r}}$, d. h. $||\alpha\beta|| = ||\alpha|| \cdot ||\beta||$, w. z. b. w.

§ 18. Jetzt wenden wir uns zum Falle, wo die Elemente α, β nicht beide von erster Art sind [2]). Dieser Fall kann nur dann zutreffen, wenn die Charakteristik des Körpers K eine von 0 verschiedene rationale Primzahl l ist.

α möge in K einer irreduziblen Gleichung $f(x) = 0$ genügen; man kann dann eine ganze rationale Zahl $r \geqq 0$ bestimmen, so daß $f(x)$ eine rationale Funktion

---

[1]) *Steinitz*, a. a. O. § 13.

[2]) *Steinitz* , a. a. O. § 14.

von x^{l^r}, nicht aber von $x^{l^{r+1}}$ ist, d. h. $f(x) = g(x^{l^r})$. $g(x)$ ist dann ein in K irreduzibles Polynom mit einfachen Wurzeln. Ihre Wurzel $\bar{\alpha} = \alpha^{l^r}$ ist von der ersten Art. r wird der Exponent von α genannt. Ist $f(x) = g(x^{l^r}) = x^{nl^r} + a_1 x^{(n-1)l^r} + \cdots + a_n$, so ist $||\alpha|| = ||a_n||^{\frac{1}{nl^r}}$, $||\bar{\alpha}|| = ||a_n||^{\frac{1}{n}}$, also $||\alpha|| = ||\bar{\alpha}||^{\frac{1}{l^r}}$.

Es seien jetzt r, s, t die Exponenten von α, bzw. β und $\gamma = \alpha\beta$, so daß $\bar{\alpha} = \alpha^{l^r}$, $\bar{\beta} = \beta^{l^s}$, $\bar{\gamma} = \gamma^{l^t}$ Elemente von erster Art sind. Aus $\gamma = \alpha\beta$ folgt

$$\gamma^{l^{r+s+t}} = \alpha^{l^{r+s+t}} \beta^{l^{r+s+t}}, \text{ d. h. } \bar{\gamma}^{l^{r+s}} = \bar{\alpha}^{l^{s+t}} \bar{\beta}^{l^{r+t}};$$

da für die Elemente erster Art II′. gilt, so folgt daraus

$$||\bar{\gamma}||^{l^{r+s}} = ||\bar{\alpha}||^{l^{s+t}} \, ||\bar{\beta}||^{l^{r+t}},$$

also

$$||\bar{\gamma}||^{\frac{1}{l^t}} = ||\bar{\alpha}||^{\frac{1}{l^r}} \, ||\bar{\beta}||^{\frac{1}{l^s}}, \text{ d. h. } ||\gamma|| = ||\alpha|| \cdot ||\beta||.$$

§ 19. *Um* III′ *zu beweisen, werden wir die Annahme machen, daß K perfekt ist.* Genügt dann α einer in K irreduziblen Gleichung

$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, so folgt aus $||\alpha|| \leqq 1$, d. h. $||a_n||^{\frac{1}{n}} \leqq 1$, daß $||a_n|| \leqq 1$, so daß a_n ein ganzes Element aus K ist. Nach § 15 ist auch α ganz und ebenso die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, d. h. 1.) $||a_1|| \leqq 1$, $||a_2|| \leqq 1, \ldots, ||a_n|| \leqq 1$. $1 + \alpha$ genügt der in K irreduziblen Gleichung $f(x - 1) = 0$, so daß 2.) $||1 + \alpha|| = ||f(-1)||^{\frac{1}{n}}$ ist. Es ist aber $f(-1) = (-1)^n + a_1(-1)^{n1-} + \cdots + a_n$, also nach 1.): $||f(-1)|| \leqq 1$, und nach 2.) $||1 + \alpha|| \leqq 1$.

Zugleich folgt unmittelbar aus § 15, daß *in einem perfekten bewerteten Körper die ganzen algebraischen Elemente wieder dadurch charakterisiert sind, daß ihre Bewertung $\leqq 1$ ist, und die Einheiten die Bewertung 1 besitzen.*

Zeigen wir an einem Beispiele, daß zum Beweise von III′ die Perfektheit des bewerteten Körpers K notwendig ist.

Betrachten wir die Gleichung 1.) $x^2 - 2x + 3 = 0$ im nichtarchimedisch bewerteten Körper der rationalen Zahlen R (§ 3) mit $p = 3$; $||3||$ ist dann eine reelle Zahl, $0 < ||3|| < 1$. 1.) ist in R irreduzibel (es gilt also nicht der Satz aus § 15). Für die Wurzeln von 1.): $1 \pm \sqrt{-2}$ wäre $||1 \pm \sqrt{-2}|| = \sqrt{||3||} = 1$. In R ist 2 eine Einheit, also $||2|| = 1$. Wäre III′ erfüllt, so müßte $||2|| = ||(1 + \sqrt{-2}) + (1 - \sqrt{-2})|| \leqq \sqrt{||3||} < 1$ sein, was zu einem Widerspruche führen würde. Auch würde nicht der Satz aus § 15 gelten und der Satz, daß ein algebraisches Element dann und nur dann ganz ist, wenn seine Bewertung $\leqq 1$ ist. Betrachten wir $\frac{1 + \sqrt{-2}}{1 - \sqrt{-2}} = \frac{-1 + 2\sqrt{-2}}{3}$. Die Bewertung dieses Elementes ist 1 und trotzdem ist es kein ganzes Element, da es der in R irreduziblen Gleichung $x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$ genügt.

Der perfekte Körper R' ist der *Hensel*sche Körper der 3-adischen Zahlen. Die Gleichung 1.) ist in R' zerlegbar, wie aus § 12 folgt. Ihre Diskriminante ist nämlich $8 = 2^3$, also $||8|| = 1$. Es ist aber $x^2 - 2x + 3 \equiv x\,(x - 2) \pmod 3$, so daß 1.) auch in R' zerfällt und $1 + \sqrt{-2} \equiv 2$, $1 - \sqrt{-2} \equiv 0 \pmod 3$ ist. Also ist $||1 + \sqrt{-2}|| = 1$, $||1 - \sqrt{-2}|| = ||3||$.

§ 20. *Ist K ein perfekter bewerteter Primelementkörper, so existiert auch in jeder endlichen algebraischen Erweiterung L von K ein Primelement.*

Es sei n der Grad der endlichen algebraischen Erweiterung L. Jedes Element aus L genügt in K einer irreduziblen Gleichung, deren Grad ein Teiler von n ist [1]). Bezeichnen wir mit p das Primelement von K, so haben die Bewertungen der Elemente aus L die Form $||p||^{\frac{k}{n}}$, wo k eine ganze Zahl bedeutet. Für ganze Nichteinheitselemente wird k eine ganze positive Zahl sein. Es gibt also gewiß unter den ganzen Nichteinheitselementen aus L ein Element mit der größten Bewertung, und dieses wird gerade das Primelement π von L sein (§ 6).

Es sei $||\overline{\pi}|| = ||p||^{\frac{f}{n}}$ (f ist eine ganze rationale Zahl). Man kann alle Elemente aus L in der Form $\varepsilon\,\pi^r$ ausdrücken, wo ε eine Einheit aus L und r eine ganze rationale Zahl bedeutet; für ganze Elemente aus L ist $r \geqq 0$. Es ist also auch $p = \varepsilon\,\pi^e$, d. h. $||p|| = ||\pi||^e$. Da aber $||\pi|| = ||p||^{\frac{f}{n}}$, so folgt daraus, daß $ef = n$ ist.

Der bewertete perfekte algebraisch geschlossene Körper.

§ 21. Wir werden endlich beweisen, daß *der derivierte Körper K' eines algebraisch abgeschlossenen, bewerteten Körpers wieder algebraisch abgeschlossen ist.* Zu diesem Ziele genügt es zu beweisen, daß jedes Polynom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ mit Koeffizienten aus K' in K' in lineare Faktoren zerfällt [2]).

Zuerst werden wir den Fall betrachten, daß die Diskriminante $D(f(x)) = D$ von 0 verschieden ist. Im Körper K kann man die Elemente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ so wählen, daß $||a_1 - A_1|| < ||D||$, $||a_2 - A_2|| < ||D||, \ldots, ||a_n - A_n|| < ||D||$. Setzen wir $F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n$; dann ist $F(x) \equiv f(x) \pmod{D}^*$. Daraus wird folgen $D(F(x)) \equiv D \pmod{D}^*$, d. h. $||D(F)|| = ||D||$. Benutzen wir den Satz aus § 12. Der Zerlegung von $f(x) \pmod{D}^*$ wird eine Zerlegung im bewerteten perfekten Körper K' entsprechen. $F(x)$ als Polynom aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper K zerfällt in K in lineare Faktoren: $F(x) = (x - \Xi_1)(x - \Xi_2) \ldots (x - \Xi_n)$. Da $F(x) \equiv f(x) \pmod{D}^*$ ist, so erhalten wir $f(x) \equiv (x - \Xi_1)(x - \Xi_2) \ldots (x - \Xi_n) \pmod{D}^*$, also $f(x) = (x - \xi_1) \ldots (x - \xi_n)$, $\xi_1 \equiv \Xi_1, \ldots, \xi_n \equiv \Xi_n \pmod{1}^*$. Ist $D(f(x)) = 0$, so hat $f(x)$ vielfache Wurzeln. Setzen wir [3]) $f(x) = f_1(x)\,(f_2(x))^2\,(f_3(x))^3 \ldots$, wo die Polynome $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ einfache Wurzeln, also von 0 verschiedene Diskriminanten haben. Ist die Charakteristik von K' gleich 0, so gehört jedes der Polynome $f_m(x)$ zu K'; ebenso ist es für die Charakteristik l, wenn m nicht durch l teilbar ist. In diesen Fällen kann man das vorige Resultat gleich benutzen. Ist dagegen die Charakteristik von K' gleich l und $\lambda = l^t$ die höchste Potenz von l, die in m enthalten ist, so gehört $(f_m(x))^\lambda$ zu K'. Sind in K' die λ-ten Wurzeln der Koeffizienten des Polynoms $(f_m(x))^\lambda$ enthalten, so wird schon $f_m(x)$ zu K' gehören [4]). Der Satz wird also

---

[1]) *Steinitz* § 7.

[2]) Vgl. *Hensel p.* 157—159.

[3]) *Steinitz* § 7.

[4]) *Steinitz* § 11.

in diesem Falle mit Benutzung des vorigen Resultates bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß jede Gleichung von der Form $x^{l'} - C = 0$, wo C ein Element aus K' bedeutet, in K' lösbar ist (und dann eine einzige Wurzel besitzt). Wir können C als Limes einer Folge aus K, $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ darstellen. Die Gleichung $x^{l'} - c_n = 0$ ist lösbar in K, da der Körper K algebraisch abgeschlossen ist. Ihre einzige Wurzel bezeichnen wir γ_n. Zeigen wir, daß die Folge $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ konvergiert und ihr Limes, der in R' fällt, die Gleichung $x^{l'} - C = 0$ erfüllt. Es ist nämlich $\lim_{n=\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^{l'} = \lim (\gamma_{n+1}^{l'} - \gamma_n^{l'}) = \lim_{n=\infty} (c_{n+1} - c_n) = 0$. Aus $\lim_{n=\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^{l'} = 0$ folgt aber $\lim_{n=\infty} ||(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^{l'}|| = \lim_{n=\infty} ||\gamma_{n+1} - \gamma_n||^{l'} = 0$, sodaß auch $\lim_{n=\infty} ||\gamma_{n+1} - \gamma_n|| = 0$, d. h. $\lim_{n=\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) = 0$ ist, womit die Konvergenz der Folge $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ bewiesen ist. Für ihren Limes γ gilt

$$\gamma^{l'} - C = \lim_{n=\infty} (\gamma^{l'} - c_n) = \lim_{n=\infty} (\gamma^{l'} - \gamma_n^{l'}) = \lim_{n=\infty} (\gamma - \gamma_n)^{l'} = 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkungen zu Herrn Hensels Arbeit „Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper".

Von Herrn *Tonio Rella* in Graz.

Herr *Hensel* hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit [1]) die Frage nach der Zerlegung eines beliebigen Primteilers $\mathfrak{p}$ eines algebraischen Zahlkörpers k in dem durch die reine Gleichung $x^l - A = 0$ definierten Oberkörper behandelt, wobei l eine Primzahl bedeutet und A eine Zahl von k, welche keine l-te Potenz ist.

Auf Seite 202 wird nun die Voraussetzung gemacht, daß der transzendente Erweiterungskörper $k(\mathfrak{p})$ wenigstens die l-ten Einheitswurzeln enthält. Ohne diese Voraussetzung ist das ausgesprochene Resultat nicht richtig, und es soll daher im folgenden jener nicht behandelte Fall erledigt werden.

Ich schließe mich dabei in den Bezeichnungen und der Beweisführung vollständig der angeführten Arbeit an und gebe nur die einer Ergänzung bedürfenden Punkte an.

Wenn $p \neq l$ ist, und $p^f - 1$ zu l teilerfremd, so hat die reduzierte Grundgleichung (4a.) die Gestalt

$$x'^l = A_0 = \pi^{a_0} (\mathfrak{p}).$$

Ist $p = l$ und kommen in $k(\mathfrak{l})$ nicht die l-ten Einheitswurzeln vor, so haben wir den regulären Fall der multiplikativen Darstellung vor uns, und jede Zahl A erscheint in der multiplikativen Darstellung

$$A = \lambda^a \omega^b \eta_1^{c_1} \eta_2^{c_2} \ldots \eta_\mu^{c_\mu} (\mathfrak{l}),$$

wobei ω eine primitive $l^f - 1$-te Einheitswurzel ist und die Einseinheiten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$ lauter zu l teilerfremde Gradzahlen aufweisen. Die reduzierte Grundgleichung (4b.) hat dann die Gestalt:

$$x'^l = A_0 = \lambda^{a_0} \eta_1^{c_1^{(0)}} \eta_2^{c_2^{(0)}} \ldots \eta_\mu^{c_\mu^{(0)}} (\mathfrak{l}),$$

wobei alle Exponenten nach der dort (S. 204 u.) definierten Ausdrucksweise der ersten Klasse angehören.

Es sind daher bei Nichtvorkommen von l-ten Einheitswurzeln im Körper $k(\mathfrak{p})$ bzw. $k(\mathfrak{l})$ nur die Fälle zu behandeln:

---

[1]) Dieses Journal Bd. 151, S. 200—209.

(1.) $x'^l \equiv 1\ (\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$,
(2.) $x'^l \equiv \pi(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{l}$,
(3.) $x'^l \equiv \lambda\ (\mathfrak{l})$, (3a.) $x'^l \equiv 1 - \alpha\ \lambda^{k_i}\ (\mathfrak{l})$, $(k_i, l) = 1$.

Die Fälle (2.) und (3.) ergeben nach genau denselben Schlüssen die Zerlegung $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^l$ bzw. $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}^l$. Der Fall, daß $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{l}$ Primideal bleibt, kann jetzt nicht eintreten, der Fall (1.) erfordert eine besondere Behandlung, welche im folgenden gegeben wird.

Gleichung (5.) Seite 203 lautet

$$x'^l - 1 = (x' - 1)(x' - \zeta) \ldots (x' - \zeta^{l-1})\ (\mathfrak{p})$$

wo ζ eine primitive l-te Einheitswurzel bedeutet. Wenn nun ζ nicht dem Körper $k(\mathfrak{p})$ angehört, so ist dies keine Zerlegung in irreduzible Faktoren in $k(\mathfrak{p})$.

Ich unterscheide nun die Fälle (1.) $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{l}$ und (2.) $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$.

ad (1.) $\mathfrak{p}$ sei vom Grade f also $N(\mathfrak{p}) = p^f = P$ und es gehöre P mod l zum Exponenten f'

$$P^{f'} \equiv 1\ (l),\ l - 1 = f' z',$$

dann gilt eine Zerlegung

$$x'^l - 1 = (x' - 1) \prod_{i=1}^{z'} \varphi_i(x')\ (\mathfrak{p}),$$

wobei alle Funktionen φ_i vom Grade f' sind, und daher die Zerlegung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{z'},\ N_k(\mathfrak{P}_0) = \mathfrak{p},\ N_k(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}^{f'}\ (i = 1, 2, \ldots, z').$$

Beweis: Jede Einheitswurzel η, die (mod. p) zum Exponenten f paßt ($\eta^{p^f} = \eta$), genügt einer im Bereich der rationalen p-adischen Zahlen irreduziblen Gleichung vom Grade f und durch eine beliebige zum Exponenten f passende Einheitswurzel ist jede zum Exponenten f oder einem Teiler von f passende Einheitswurzel rational (im Bereich der p-adischen Zahlen) darstellbar. Paßt ferner η_0 zum Exponenten f_0 und η zum Exponenten f, so ist der Körper niedrigsten Grades der η_0 und η enthält, vom Grade $\frac{ff_0}{(f, f_0)} = \nu$ und kann durch eine zum Exponenten ν passende Einheitswurzel z. B. $\eta\,\eta_0$ erzeugt werden. Gehört nun p mod l zum Exponenten f_0, so genügt jede primitive l-te Einheitswurzel, da sie zum Exponenten f_0 paßt, einer im Bereich der p-adischen Zahlen irreduziblen Gleichung vom Grade f_0. In $k(\mathfrak{p})$ sind aber sämtliche $(p^f - 1)$-te Einheitswurzeln enthalten, durch Adjunktion einer zum Exponenten f_0 passenden Einheitswurzel entsteht ein Körper, der zum Exponenten $\frac{ff_0}{(f, f_0)}$ passende Einheitswurzeln enthält und daher vom Relativgrad $\frac{f_0}{(f, f_0)}$ über $k(\mathfrak{p})$ ist. Jede primitive l-te Einheitswurzel genügt daher im Körper $k(\mathfrak{p})$ einer irreduziblen Gleichung vom Grade $\frac{f_0}{(f, f_0)}$ und das ist ersichtlich gleich f', wenn $p^f = P$ zum Exponenten f' gehört.

ad. (2.) $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$ sei vom Grade f, der Körper $k(\mathfrak{l})$ enthält eine primitive $l' - 1$-te Einheitswurzel ω und es möge

$$-l \equiv \omega^a \lambda^e\ (\mathfrak{l}^{e+1})$$

sein, wobei λ eine Primzahl von $k(\mathfrak{l})$ bedeutet.

Setzen wir $y = x' - 1$, so wird

$$x'^l - 1 = y\,(y^{l-1} + l\,y^{l-2} + \binom{l}{2} y^{l-3} + \cdots + l),$$

und es ist zu untersuchen, wie

$$y^{l-1} + l\,y^{l-2} + \cdots + l = 0$$

in irreduzible Faktoren zerfällt. Statt dieser *Eisenstein*schen Gleichung kann man nach *Hensel* (Algebraische Zahlen S. 201) die Näherungsgleichung

$$y^{l-1} - \omega^a \lambda^s = 0 \quad (1)$$

betrachten.

Da der Körper $k(\mathfrak{l})$ sicher primitive $(l-1)$-te Einheitswurzeln enthält, so funktionieren die Sätze der *Hensel*schen Arbeit, wenn man $l-1$ in seine Primfaktoren zerlegt. Ist

$$z' = (l-1, a, e),\ z'\,f' = (l-1, e),\ l - 1 = z'\,f'\,e'$$

so gilt, wie durch wiederholte Anwendung der angeführten Sätze hervorgeht, die Zerlegung

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{L}_0\,(\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{L}_2 \ldots \mathfrak{L}_{z'})^{e'},\ N_k\,(\mathfrak{L}_0) = 1,\ N_k\,(\mathfrak{L}_i) = \mathfrak{l}''\ (i = 1, 2, \ldots, z').$$

Zur *Newton*schen Approximationsmethode in der Theorie der p-adischen Gleichungswurzeln.

Von Herrn *Tonio Rella* in Wien.

In *K. Hensel* „Theorie der algebraischen Zahlen" ist auf S. 73f. der Satz bewiesen: „Ist ξ_0 ein solcher Näherungswert der Gleichung ν-ten Grades $F(x) = 0$, daß

$$F(\xi_0) \equiv 0 \ (p^\varrho)$$

und

$$\varrho > \mathrm{Max}\left(\frac{i\varrho' - \varrho^{(i)}}{i-1}\right) i = 2, 3, \ldots \nu$$

ist, wo allgemein $\varrho^{(i)}$ die Ordnungszahl von $\frac{F^{(i)}(\xi_0)}{i!}$ ist, so besitzt die obige Gleichung eine p-adische Wurzel, für welche

$$\xi \equiv \xi_0 \ (p^{\varrho - \varrho'})$$

ist und welche mit jeder vorgegebenen Genauigkeit durch die *Newton*sche Näherungsmethode gefunden werden kann, vorausgesetzt, daß die Ordnungszahlen $\varrho', \varrho'', \ldots \varrho^{(\nu)}$ bei den sukzessiven Annäherungen ungeändert bleiben".

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß stets die erste Bedingung

$$\varrho > \mathrm{Max}\left(\frac{i\varrho' - \varrho^{(i)}}{i-1}\right)$$

hinreichend dafür ist, daß die vorgelegte Gleichung eine Wurzel ξ besitzt, deren $(\varrho - \varrho' - 1)$-ter Näherungswert ξ_0 ist.

Beweis: Es ist

(1.) $$F(\xi_0 + h) = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{F^{(i)}(\xi_0)}{i!} h^i$$

(2.) $$\frac{1}{k!} F^{(k)}(\xi_0 + h) = \sum_{i=0}^{\nu-k} \frac{1}{k!} \frac{F^{(k+i)}(\xi_0)}{i!} h^i = \sum_{i=0}^{\nu-k} \binom{i+k}{k} \frac{F^{(k+i)}(\xi_0)}{(i+k)!} h^i.$$

Bezeichnen wir die Ordnungszahlen von $\frac{F^{(i)}(\xi_0)}{i!}$ wie oben mit $\varrho^{(i)}$ und die von $\frac{F^{(i)}(\xi_0 + h)}{i!}$ mit $\varrho_1^{(i)}$, wobei h aus der Gleichung

$$F(\xi_0) + hF'(\xi_0) = 0$$

zu berechnen ist, so ist die Ordnung von $\frac{F^{(i)}(\xi_0)}{i!}h^i$ gleich $\varrho^{(i)} + i\ (\varrho - \varrho')$ und wegen des vorausgesetzten Bestehens der Bedingung

$\varrho > \mathrm{Max}\left(\frac{i\varrho' - \varrho^{(i)}}{i-1}\right)$ d. h. $\varrho^{(i)} + i\ (\varrho - \varrho') > \varrho$ für $i = 2, 3, \ldots \nu$ folgt aus (1.)

$$\varrho_1 \geqq \operatorname*{Min}_{i=2,3,\ldots\nu} (\varrho^{(i)} + i\ (\varrho - \varrho')).$$

Es sei

$$\operatorname*{Min}_{i=2,3,\ldots\nu} (\varrho^{(i)} + i\ (\varrho - \varrho')) = \varrho + r, \text{ dann ist } r \geqq 1$$

(a.) $$\varrho_1 = \varrho + r + s, \quad r \geqq 1, s \geqq 0$$

Ebenso folgt aus (2.) für $k = 1$: $\varrho_1' = \varrho'$; denn es sind die Ordnungszahlen der r Summanden auf der rechten Seite gleich ϱ', resp. $\geqq \varrho^{(i+1)} + i\,(\varrho - \varrho')$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \nu - 1$ und aus

$$\varrho^{(i)} + i\ (\varrho - \varrho') \geqq \varrho + r, \quad i = 2, 3, \ldots \nu$$

folgt $$\varrho^{(i)} + (i-1)\ (\varrho - \varrho') \geqq \varrho' + r, \quad i = 2, 3, \ldots \nu$$

oder $$\varrho^{(i+1)} + i\ (\varrho - \varrho') \geqq \varrho' + r, \quad i = 1, 2, \ldots \nu - 1;$$

daher ist ϱ_1' gleich der niedrigsten Ordnungszahl ϱ' der Summanden der rechten Seite.

(b.) $$\varrho_1' = \varrho'.$$

Schließlich folgt aus (2.) für $k \geqq 2$

(c.) $$\varrho_1^{(k)} = \operatorname*{Min}_{i=0,1,\ldots\nu-k} (\varrho^{(i+k)} + i\ (\varrho - \varrho')) \text{ für } k = 2, 3, \ldots \nu.$$

Durch Addition von

$$k(\varrho_1 - \varrho_1') = k(\varrho - \varrho') + kr + ks$$

zu (c.) folgt

(d.) $$\varrho_1^{(k)} + k\ (\varrho_1 - \varrho_1') \geqq k\ (\varrho - \varrho') + \operatorname*{Min}_{i=0,1,\ldots\nu-k} (\varrho^{i+k} + k\ (\varrho - \varrho')) + kr + ks$$

$$= \operatorname*{Min}_{i=0,1,\ldots\nu-k} (\varrho^{(i+k)} + (i+k)\ (\varrho - \varrho')) + kr + ks \geqq \varrho + r + kr + ks$$

$$= \varrho_1 + kr + (k-1)\,s \geqq \varrho_1 + kr \geqq \varrho_1 + 2r, \text{ da } k \geqq 2 \text{ ist.}$$

Die Bedingungen für die Fortsetzbarkeit des *Newton*schen Näherungsverfahrens sind die Ungleichungen (d.), und es ist auch ersichtlich, daß beim folgenden Schritt mindestens $2r$ Stellen durch das Verfahren gewonnen werden können.

Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper.

Von Herrn *Helmut Hasse* in Kiel.

Inhalt.

Seite

Einleitung 113
§ 1. Die quadratfreien Kerne in den $k(\mathfrak{p})$ und k 115
§ 2. Allgemeines über quadratische Formen in k und den $k(\mathfrak{p})$ 117
§ 3. Unäre Formen, Darstellbarkeit der Null durch binäre Formen 118
§ 4. Darstellbarkeit der Null durch ternäre Formen in einem $k(\mathfrak{p})$, Darstellbarkeit in $k(\mathfrak{p})$ durch binäre Formen 119
§ 5. Darstellbarkeit der Null in k durch ternäre Formen, Darstellbarkeit in k durch binäre Formen 122
§ 6. Darstellbarkeit der Null durch quaternäre Formen in einem $k(\mathfrak{p})$, Darstellbarkeit in $k(\mathfrak{p})$ durch ternäre Formen 123
§ 7. Darstellbarkeit der Null in k durch quaternäre Formen, Darstellbarkeit in k durch ternäre Formen 125
§ 8. n-äre Formen 128

Einleitung.

In drei früheren Arbeiten [1]) habe ich das Darstellbarkeits- und Äquivalenzproblem für quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen vollständig und systematisch behandelt. Die Resultate waren deshalb alle sehr einfach zu gewinnen, weil als Bereich für die auftretenden Größen (Koeffizienten, Variable und dargestellte Zahlen) ein Körper zugrundegelegt wurde. Daß dieser Körper gerade der rationale Zahlkörper war, ist für die Anwendbarkeit der dort eingeschlagenen Methoden von keinerlei Bedeutung. Ich zeige in dieser sowie in einer weiteren Arbeit, daß sich alle a. a. O. ausgeführten Untersuchungen in ganz analoger Weise für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper k als Grundkörper durchführen lassen.

Das charakteristische meiner Methode in den genannten Arbeiten besteht darin, daß die Möglichkeit einer Darstellbarkeits- oder Äquivalenzbeziehung für den Körper K allen rationalen Zahlen aus der Möglichkeit dieser Beziehung für alle *Hensel*schen

[1]) Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen, Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen, dieses Journal Bd. 152, S. 129 ff., S. 205 ff., Bd. 153, S. 12 ff., im folgenden zitiert mit H I, H II, H III.

Erweiterungskörper $K(p)$ erschlossen wird, für die sich die betr. Kriterien leichter finden lassen, als für den Körper K, hauptsächlich deshalb, weil in einem $K(p)$ nur die einzige Primzahl p vorkommt. Wie sich herausstellte, liegt dieser Methode das allgemeine Prinzip zugrunde:

Für das Bestehen einer Darstellbarkeits- oder Äquivalenzbeziehung im rationalen Körper K ist notwendig und hinreichend, daß dieselbe in allen $K(p)$ besteht [1]).

Für einen algebraischen Grundkörper k führt diese und die genannte folgende Arbeit zu dem entsprechenden Prinzip:

(I.) *Für das Bestehen einer Darstellbarkeits- oder Äquivalenzbeziehung in einem algebraischen Körper k ist notwendig und hinreichend, daß dieselbe in jedem Henselschen Erweiterungskörper $k(\mathfrak{p})$ besteht.*

Ich will in dieser Arbeit, parallel zu H I, das Darstellbarkeitsproblem für einen beliebigen algebraischen Grundkörper k vollständig behandeln, in der weiteren, parallel zu H II und H III, das Äquivalenzproblem und die höheren Darstellbarkeitsprobleme.

Meine Entwicklungen fußen vor allem auf den Sätzen über das quadratische *Hilbert*sche Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$, die von *Hilbert-Furtwängler* in deren Arbeiten über die Reziprozitätsgesetze und Klassenkörper erhalten sind und neuerdings von Herrn *Hensel* und mir auf Grund der *Hensel*schen Methoden in der algebraischen Zahlentheorie von anderen Grundlagen ausgehend behandelt und erweitert werden. Insbesondere lege ich das allgemeine quadratische Reziprozitätsgesetz in der *Hilbert*schen Fassung $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ zugrunde, das zum Beweis meines Prinzips (I.) verwendet wird, ebenso zu demselben Zweck den auf algebraische Körper vorallgemeinerten Satz von den Primzahlen in einer arithmetischen Reihe, also die Tatsache, daß in jeder Idealklasse im allgemeinsten Sinne eines algebraischen Zahlkörpers unendlich viele Primideale vorhanden sind. Die Notwendigkeit der Verwendung der in diesen beiden Sätzen steckenden transzendenten Methoden zum Beweis des Prinzips (I.) im Gegensatz zu allen übrigen, rein arithmetischen Entwicklungen dieser Arbeit scheint mir in der Natur der Sache zu liegen. Es soll aus der Möglichkeit gewisser Beziehungen für jeden einzelnen Primteiler $\mathfrak{p}$ von k auf das Bestehen dieser Beziehungen in k selbst, d. h. für die *Gesamtheit* aller $\mathfrak{p}$ geschlossen werden. Es ist daher natürlich, daß hierbei Betrachtungen über die „Dichtigkeit" von Primteilern $\mathfrak{p}$ gewisser Eigenschaften hineinspielen, wie sie doch den genannten transzendenten Beweisen eigentümlich sind.

In neuerer Zeit hat sich Herr *Siegel* [2]) mit speziellen Darstellbarkeitsproblemen durch quadratische Formen beschäftigt. Die von ihm gewonnenen Sätze über die Darstellbarkeit von algebraischen Zahlen als Summe von Quadraten ergeben sich zwanglos aus meiner allgemeinen, systematischen Theorie, bis auf die mit meinen

---

[1]) H I, S. 130, (II.); H II, S. 208, (II.); H III, S. 24, Satz 11; S. 30, Satz 16; S. 33, Satz 19.

[2]) *C. Siegel*, Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate, Math. Zeitschr. 11 S. 246 ff.

Methoden ohne weiteres nicht zugänglichen Sätze über die Beschränkung der Nenner in den Darstellungsgleichungen, sowie die Sätze asymptotischen Charakters.

§ 1. Die quadratfreien Kerne in den $k(\mathfrak{p})$ und k.

Ich stelle den Untersuchungen über quadratische Formen in k einige Tatsachen über die *Hensel*schen Erweiterungskörper $k(\mathfrak{p})$ von k voran, die dabei zur Anwendung kommen.

Sei $\mathfrak{p}$ irgendein Primteiler von k, der zu der rationalen Primzahl p gehört, e seine Ordnung, f sein Grad und $e \cdot f = m$, ferner $k(\mathfrak{p})$ der transzendente, zu $\mathfrak{p}$ gehörige *Hensel*sche Erweiterungskörper, π eine genau durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl aus $k(\mathfrak{p})$, (die nötigenfalls sogar aus k gewählt werden kann), schließlich ω eine der in $k(\mathfrak{p})$ stets vorkommenden, primitiven $(p^f - 1)$-ten Einheitswurzeln. Ist dann

a.) p ungerade,

so ist jede Zahl α aus $k(\mathfrak{p})$ eindeutig in der Form

$$\alpha = \pi^a \omega^b \alpha_0^2 \ (\mathfrak{p}); \quad (a, b = 0 \text{ oder } 1)$$

darstellbar [1]), und daraus ergibt sich, daß jede Zahl aus $k(\mathfrak{p})$ von einer der 4 Zahlen

$$(1.) \qquad \pi^a \omega^b; \quad (a, b = 0 \text{ oder } 1)$$

nur um ein Quadrat aus $k(\mathfrak{p})$ unterschieden ist. Ich nenne daher diese 4 Zahlen (1.) ein *vollständiges System von quadratischen Kernen in* $k(\mathfrak{p})$ oder auch kurz *die* $\mathfrak{p}$-*adischen Kerne.*

b.) $p = 2$.

In diesem Falle will ich die zugehörigen algebraischen Primteiler $\mathfrak{p}$, wie üblich, mit $\mathfrak{l}$ und entsprechend π mit λ bezeichnen. Für alle Zahlen α aus $k(\mathfrak{l})$ gilt dann, wie an anderer Stelle [2]) ausgeführt wurde, die folgende eindeutige Darstellung:

$$\alpha = \lambda^a \eta_1^{c_1} \ldots \eta_m^{c_m} \eta_a^{c_a} \alpha_0^2(\mathfrak{l}); \quad (a; c_1, \ldots, c_m; \ c_a = 0 \text{ oder } 1),$$

wo die $\eta_1, \ldots, \eta_\mu$; η_a die a. a. O. ausführlich erläuterte Bedeutung (hier speziell für $l = 2$) haben. Daraus ergibt sich das folgende vollständige System von 2^{m+2} quadratfreien Kernen in $k(\mathfrak{l})$:

$$(2.) \qquad \lambda^a \eta_1^{c_1} \ldots \eta_m^{c_m} \eta_a^{c_a}; \quad (a; c_1, \ldots, c_m; \ c_a = 0 \text{ oder } 1).$$

Außer den sämtlichen Primteilern $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}$, die den sämtlichen endlichen Primzahlen p und 2 zugeordnet sind, benötigen wir, wie in H I—H III, noch diejenigen algebraischen Stellen $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$, die der Stelle p_∞ des rationalen Körpers zugeordnet sind. Da diese in den Arbeiten von Herrn *Hensel* bisher nicht behandelt wurden, gebe ich hier kurz an, wie sich die für endliches p von Herrn *Hensel* geschaffene Theorie der π-adischen Erweiterungskörper $k(\mathfrak{p})$ [3]) auf den Fall $p = p_\infty$ überträgt.

---

[1]) Siehe z. B. *K. Hensel*, Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper, dieses Journal Bd. 151, S. 203.

[2]) *K. Hensel* und *H. Hasse*, Über die Normenreste eines relativ-zyklischen Körpers vom Primzahlgrad l nach einem Primteiler $\mathfrak{l}$ von l, erscheint demnächst in den Math. Ann.

[3]) *K. Hensel*, Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Math. Zeitschr. 2, S. 433 ff.

Zerfällt die Grundgleichung $f(x) = 0$ von k in $K(p_\infty)$, d. h. im Körper der reellen Zahlen, in r irreduzible Faktoren 1. Grades und s irreduzible Faktoren 2. Grades, so ist k in bezug auf den Koeffizientenkörper $K(p_\infty)$ ein aus r Körpern ersten und s Körpern zweiten Grades über $K(p_\infty)$ zusammengesetzter Ring $R(k, p_\infty)$. Die r Körper 1. Grades sind mit $K(p_\infty)$ identisch, die s Körper 2. Grades sämtlich identisch mit dem Körper aller komplexen Zahlen, der die allein noch mögliche algebraische Erweiterung von $K(p_\infty)$ ist. Ich ordne jedem der r Körper 1. Grades eine „*Stelle* $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ *vom Grade* $f = 1$“ und jedem der s Körper 2. Grades eine „*Stelle* $\mathfrak{q}_\infty^{(i)}$ *vom Grade* $f = 2$“ zu, und bezeichne die entsprechenden Körper mit $k(\mathfrak{p}_\infty^{(1)}), \ldots, k(\mathfrak{p}_\infty^{(r)})$ und $k(\mathfrak{q}_\infty^{(1)}), \ldots, k(\mathfrak{q}_\infty^{(s)})$. Der Ring $R(k, p_\infty)$ ist dann einstufig isomorph mit dem System der $r + s$ Körper $k(\mathfrak{p}_\infty^{(i)}), k(\mathfrak{q}_\infty^{(i)})$. Jedes Element aus $R(k, p_\infty)$ hat für jeden dieser Körper, oder, wie ich auch sagen will, für die betr. Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ bzw. $\mathfrak{q}_\infty$ einen eindeutig bestimmten Wert, und umgekehrt entspricht jedem vorgegebenen System von beliebigen $r + s$ Elementen aus jenen $r + s$ Körpern eindeutig ein Element aus $R(k, p_\infty)$.

Auch für die Elemente aus einem Körper $k(\mathfrak{p}_\infty)$ bzw. $k(\mathfrak{q}_\infty)$ besteht eine multiplikative Normalform, die wieder die sämtlichen quadratfreien Kerne in $k(\mathfrak{p}_\infty)$ bezw. $k(\mathfrak{q}_\infty)$ aufzustellen gestattet.

c.) Primteiler $\mathfrak{p}_\infty$.

Da $k(\mathfrak{p}_\infty)$ identisch mit dem Körper $K(p_\infty)$ aller reellen Zahlen ist, besteht für jedes Element α aus $k(\mathfrak{p}_\infty)$ die eindeutige Darstellung:

$$\alpha = (-1)^b e^c \, (\mathfrak{p}_\infty); \quad \begin{cases} b = 0 \text{ oder } 1, \\ c \quad p_\infty\text{-adische (reelle) Zahl.} \end{cases}$$

Da c in $k(p_\infty)$ stets durch 2 teilbar ist, sind die beiden einzigen quadratfreien Kerne (ebenso wie in $K(p_\infty)$):

(3.) $$(-1)^b; \quad (b = 0 \text{ oder } 1).$$

d.) Primteiler $\mathfrak{q}_\infty$.

Für die Elemente α eines mit dem Körper aller komplexen Zahlen identischen Körpers $k(\mathfrak{q}_\infty)$ besteht offenbar die eindeutige Darstellung:

$$\alpha = e^{c_1} e^{c_2\sqrt{-1}} \, (\mathfrak{q}_\infty); \quad \begin{cases} c_1, c_2 \; p_\infty\text{-adische (reelle) Zahlen,} \\ 0 \leqq c_2 < 2\pi. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, daß hier nur der eine einzige quadratfreie Kern $+1$ existiert. In $k(\mathfrak{q}_\infty)$ ist also jede Zahl Quadratzahl. Die Mitführung der Körper $k(\mathfrak{q}_\infty)$ kann im folgenden unterbleiben, da in $k(\mathfrak{q}_\infty)$ offenbar jede diophantische Gleichung lösbar ist.

Ein direktes Analogon zu den in H I verwendeten „rationalen Kernen“ gibt es in algebraischen Körpern nicht, da hier keine eindeutige Zerlegung in Primzahlen besteht, andererseits aber zwei Zahlen, die sich nur um ein Idealquadrat unterscheiden, sich nicht notwendig sogar nur um ein Zahlquadrat unterscheiden. Ich bezeichne daher die Gesamtheit aller von einer Zahl α aus k nur um Zahlquadrate

aus k unterschiedenen Zahlen kurz mit $[\alpha]$ und nenne dieses Symbol den „*Kern von* α". Da alle Zahlquadrate in k natürlich auch in jedem $k(\mathfrak{p})$ Quadratzahlen sind, gehört zu einem Kern $[\alpha]$ in jedem $k(\mathfrak{p})$ ein eindeutig bestimmter $\mathfrak{p}$-adischer Kern von der Form (1.), (2.) bezw. (3.), den ich kurz mit $\alpha_\mathfrak{p}$ bezeichne.

§ 2. Allgemeines über quadratische Formen in k und den $k(\mathfrak{p})$.

Die allgemeinen Sätze über quadratische Formen, die ich den Untersuchungen von H I voranstellte, übertragen sich sämtlich wörtlich auf den hier vorliegenden Fall, daß der Grundkörper k algebraisch ist, da sie lediglich aus der Körpereigenschaft des rationalen Körpers K und der $K(p)$ gewonnen wurden.

So läßt sich auch hier jede quadratische Form aus $\left\{\begin{matrix} k \\ k(\mathfrak{p}) \end{matrix}\right\}$ durch eine umkehrbare Substitution aus $\left\{\begin{matrix} k \\ k(\mathfrak{p}) \end{matrix}\right\}$ in eine *reine Form* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ mit $\alpha_i \neq 0$ aus $\left\{\begin{matrix} k \\ k(\mathfrak{p}) \end{matrix}\right\}$ transformieren, oder ist ihr, wie ich sagen will, *in* $\left\{\begin{matrix} k \\ k(\mathfrak{p}) \end{matrix}\right\}$ *äquivalent*. Die α_i sind dabei nur bis auf quadratische Faktoren bestimmt, können also speziell in den $k(\mathfrak{p})$ als $\mathfrak{p}$-adische Kerne angenommen werden.

Bei jeder umkehrbaren Transformation in k einer Form aus k ändert sich deren Diskriminante [1]) δ nur um eine Quadratzahl aus k, sodaß der Diskriminantenkern $[\delta]$ eine Invariante gegen solche Transformationen ist. Die entsprechenden Invarianten für die einzelnen $k(\mathfrak{p})$ sind die $\mathfrak{p}$-adischen Kerne $\delta_\mathfrak{p}$ von $[\delta]$ (die $\mathfrak{p}$-adischen Diskriminantenkerne). Ich rede auch kurz von den „*Invarianten* $[\delta]$ *und* $\delta_\mathfrak{p}$" einer Form.

Wie schon in H I bemerkt, beruht der dortige Satz (IV.), S. 133 und die Bemerkung kurz vorher lediglich auf der Körpereigenschaft des Grundbereichs, sodaß auch hier gilt

(**II a.**) *Besteht in* $\left\{\begin{matrix} k \\ k(\mathfrak{p}) \end{matrix}\right\}$ *irgendeine nicht identische Darstellung der Null durch eine reine Form, so besteht dieselbe Darstellung auch so, daß alle darstellenden Variablen von Null verschieden sind,*

und als unmittelbare Folge hieraus:

(**II b.**) *Ist* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *irgendeine quadratische Form aus* $\left\{\begin{matrix} k \\ k(\mathfrak{p}) \end{matrix}\right\}$, *so sind die beiden Gleichungen:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu; \quad \left(\mu \neq 0 \text{ Zahl aus } \left\{\begin{matrix} k \\ k(\mathfrak{p}) \end{matrix}\right\}\right),$$

$$F(x_1 \ldots, x_n, x) = f(x_1, \ldots, x_n) - \mu x^2 = 0$$

stets gleichzeitig in $\left\{\begin{matrix} k \\ k(\mathfrak{p}) \end{matrix}\right\}$ *lösbar oder unlösbar.*

---

[1]) Die Diskriminante bedeutet stets die Determinante der Koeffizientenmatrix einer äquivalenten Form kleinstmöglicher Variablenzahl n, so daß sie nur für identisch verschwindende Formen, die ich ausschließe, verschwindet.

Daher läßt sich die Aufstellung der Darstellbarkeitskriterien für k nach genau derselben Methode ausführen, wie in H I, indem man zuerst die Darstellbarkeitskriterien für die Null durch $(n+1)$-äre Formen in den $k(\mathfrak{p})$ aufstellt, daraus leicht nach (II b.) die Darstellbarkeitskriterien für von Null verschiedene Zahlen durch n-äre Formen in den $k(\mathfrak{p})$ erhält, dann das den Übergang zu k vermittelnde Prinzip (I.) beweist, (was wieder nur für die Darstellungen der Null durch $(n+1)$-äre Formen nötig ist), und schließlich durch Zusammenfassung der Darstellbarkeitskriterien für alle $k(\mathfrak{p})$ die allgemeinen für k erhält.

Von dem Prinzip (I.) braucht natürlich jedesmal nur der zweite Teil, nämlich das Hinreichen der genannten Bedingung bewiesen zu werden, denn daß aus dem Bestehen einer Darstellbarkeits- oder Äquivalenzbeziehung in k das Bestehen derselben in allen $k(\mathfrak{p})$ folgt, ist selbstverständlich, da die Zahlen aus k jedem $k(\mathfrak{p})$ angehören.

§ 3. Unäre Formen, Darstellbarkeit der Null durch binäre Formen.

Durch eine unäre Form $f = \delta x^2$ der Invariante $[\delta]$ sind natürlich alle und nur die Zahlen μ aus k darstellbar, die sich von δ nur um Quadrate unterscheiden, für die also $[\mu] = [\delta]$ ist, und entsprechend (§ 2, (II b.)) stellt eine binäre Form $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$ der Invariante $[\delta] = [\alpha_1 \alpha_2]$ die Null dann und nur dann in k dar, wenn $[-\delta] = [1]$ (also Quadrat in k) ist.

Bemerkenswert ist, daß für diese Fälle das Prinzip (I.), S. 114 eine unmittelbare Folge des *Hilbert*schen Satzes [1]) ist, wonach zu jedem vorgegebenen System von Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ aus k, die nur die Eigenschaft haben, daß kein Produkt aus ihnen Quadratzahl ist, unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ existieren, sodaß die quadratischen Charaktere von $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ nach $\mathfrak{p}$ beliebig vorgeschriebene Werte haben. Für die Darstellbarkeit der Null durch die binäre Form f der Invariante $[\delta]$ in einem $k(\mathfrak{p})$ ist nämlich offenbar notwendig und hinreichend, daß $-\delta_{\mathfrak{p}} = 1$, oder auch daß $\left(\frac{[-\delta]}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{-\delta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist [2]), für die Darstellbarkeit in allen $k(\mathfrak{p})$ also:

---

[1]) *Hilbert*, Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, Math. Ann., Bd. 51, S. 26.

[2]) Das *Legendre*sche Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ verstehe ich stets in dem von Herrn *Hensel* (dieses Journal, Bd. 147, S. 233 ff.) eingeführten verallgemeinerten Sinne, nämlich:

$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = [(-1)^a, (-1)^b]$ für $\mathfrak{p}$ prim zu 2, wenn $\alpha = \pi^a \omega^b \alpha_0^2$ $(\mathfrak{p})$; $(a, b = 0$ oder $1)$,

$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = [(-1)^a, (-1)^{c_1}, \ldots, (-1)^{c_m}, (-1)^{ca}]$ für Teiler $\mathfrak{l}$ der 2, wenn $\alpha = \lambda^a \eta_1^{c_1} \ldots \eta_m^{c_m} \eta_a^{c_a} \alpha_0^2$ $(\mathfrak{l})$;
$(a;\ c_1, \ldots, c_m;\ ca = 0$ oder $1)$,

$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_\infty}\right) = (-1)^b$ für Primteiler 1. Grades von p_∞, wenn $\alpha = (-1)^b \alpha_0^2$ $(\mathfrak{p}_\infty)$; $(b = 0$ oder $1)$.

Die Werte dieses Symbols sind den 4, 2^{m+2}, 2 möglichen Kernwerten (1.), (2.), (3.) (S. 115/116) in den $k(\mathfrak{p})$ eineindeutig zugeordnet, speziell dem Kern 1 stets das Symbol $[+1, +1, \ldots, +1]$, das ich kurz mit 1 bezeichne. Für den Fall eines zu 2 primen $\mathfrak{p}$ und zu $\mathfrak{p}$ primen α ist das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ in *Hilbert*schem Sinne gleich der Teileinheit $(-1)^b$ des allgemeinen *Hensel*schen Symbols. Das Zeichen [ ] darf in dem Symbol $\left(\frac{[\alpha]}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ weggelassen werden, ebenso in dem später zu verwendenden *Hilbert*schen Normenrestsymbol.

$$\left(\frac{-\delta}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 1 \text{ [1]}.$$

Wäre dann $-\delta$ keine Quadratzahl in k, so gäbe es im Gegensatz hierzu nach dem genannten *Hilbert*schen Satz unendlich viele $\mathfrak{p}$, sodaß $\left(\frac{-\delta}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$ wäre. Also gilt:

Satz 1. *Damit eine binäre Form der Invariante* $[\delta]$ *die Null in* k *darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß sie die Null in jedem* $k(\mathfrak{p})$ *darstellt*, d. h. *daß*

$$\left(\frac{-\delta}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 1$$

ist, was mit $[-\delta] = [1]$ *gleichbedeutend ist.*

Nach § 2, (IIb.) gilt dann auch:

Satz 2. *Damit eine unäre Form der Invariante* $[\delta]$ *eine Zahl* μ *in* k *darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß sie* μ *in jedem* $k(\mathfrak{p})$ *darstellt*, d. h. *daß*

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \left(\frac{\delta}{\mathfrak{p}}\right)$$

ist, was mit $[\mu] = [\delta]$ *gleichbedeutend ist.*

§ 4. Darstellbarkeit der Null durch ternäre Formen in einem $k(\mathfrak{p})$. Darstellbarkeit in $k(\mathfrak{p})$ durch binäre Formen.

Die Frage, wann eine ternäre Form die Null in einem $k(\mathfrak{p})$ darstellt, wird durch Einführung und Auswertung des *Hilbert*schen Normenrestsymbols gelöst. Ich benutze dieses in der von Herrn *Hensel* gegebenen Verallgemeinerung auf beliebige Koeffizienten aus $k(\mathfrak{p})$ [2]: Sind α, β zwei beliebige Zahlen aus $k(\mathfrak{p})$, so wird $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ oder -1 gesetzt, je nachdem die Gleichung

$$(4.) \qquad -z^2 + \alpha x^2 + \beta y^2 = 0 \ (\mathfrak{p})$$

in nicht sämtlich verschwindenden Zahlen x, y, z aus $k(\mathfrak{p})$ lösbar ist oder nicht, oder, was auf dasselbe hinauskommt [3], je nachdem α der Relativnorm einer Zahl des relativquadratischen Körpers $k(\sqrt{\beta})$ für den Bereich von $\mathfrak{p}$ gleich ist oder nicht.

Das Symbol $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ genügt nach der ersten Definition dem Gesetz:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right); \text{ (Vertauschungssatz).}$$

Für den Wert des Symbols gilt im Falle eines zu 2 primen $\mathfrak{p}$ folgende Formel [4]:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{a_0 b_1 + a_1 b_0 + 2^{n-1} a_0 b_0},$$

wenn

---

[1]) Das Zeichen: $\equiv$ bedeutet, wie in meinen früheren Arbeiten: *für alle* $\mathfrak{p}$ *gleich.*

[2]) *K. Hensel*, Über die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ-*Abel*schen Zahlkörpern. Math. Ann. 85, S. 1 ff.

[3]) Die Zahlen x, y, z dürfen nämlich im Falle der Lösbarkeit der genannten Gleichung nach (IIa.) S. 117 sämtlich von Null verschieden angenommen werden.

[4]) *K Hensel*, a. a. O., S. 9.

$$\begin{cases}\alpha = \pi^{a_0}\,\omega^{a_1}\,\alpha_0^2 \ (\mathfrak{p}),\\ \beta = \pi^{b_0}\,\omega^{b_1}\,\beta_0^2 \ (\mathfrak{p}),\end{cases}$$

und in $k(\mathfrak{p})$ die 2^n-te Einheitswurzel als höchste enthalten ist, deren Grad eine Potenz von 2 ist. Da $k(\mathfrak{p})$ außer ev. p^n-ten nur die $(p^f - 1)$-ten Einheitswurzeln enthält, ist 2^n die höchste in $p^f - 1$ enthaltene Potenz von 2, also

$$2^{n-1} \equiv \frac{p^f - 1}{2} \bmod. 2$$

und somit

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{a_0 b_1 + a_1 b_0 + \frac{p^f-1}{2} a_0 b_0}, \tag{5.}$$

in vollkommener Analogie zu der entsprechenden Formel für den rationalen Körper[1]).

Für den Fall eines Primteilers $\mathfrak{l}$ der 2 habe ich eine (5.) entsprechende und zu der im rationalen Körper geltenden ganz analoge Formel in einer früheren Arbeit[2]) hergeleitet. Hier brauche ich nur das allgemeine Resultat dieser Untersuchung:

Es gibt eine symmetrische Bilinearform $\mathfrak{L}(a|b)$ der Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_{m+1}$ und $b_0, b_1, \ldots, b_{m+1}$, (die von dem gewählten Fundamentalsystem $\lambda; \eta_1, \ldots, \eta_m; \eta_a$ abhängt), sodaß für zwei in der Form

$$\begin{aligned}\alpha &= \lambda^{a_0}\,\eta_1^{a_1} \ldots \eta_m^{a_m}\,\eta_a^{a_{m+1}}\,\alpha_0^2 \ (\mathfrak{l}),\\ \beta &= \lambda^{b_0}\,\eta_1^{b_1} \ldots \eta_m^{b_m}\,\eta_a^{b_{m+1}}\,\beta_0^2 \ (\mathfrak{l})\end{aligned}$$

dargestellte α, β aus $k(\mathfrak{l})$ gilt:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{\mathfrak{L}(a|b)}. \tag{6.}$$

Die Determinante des Koeffizientensystems von $\mathfrak{L}(a|b)$ ist mod. 2 von Null verschieden.

Für die Primteiler $\mathfrak{p}_\infty$ bestimmt sich der Wert des Symbols $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}_\infty}\right)$ leicht unmittelbar aus der Tatsache, daß in einem $k(\mathfrak{p}_\infty)$ die Gleichung (4.) dann und nur dann lösbar ist, wenn α und β in jenem $k(\mathfrak{p}_\infty)$ nicht beide negativ sind, zu

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}_\infty}\right) = (-1)^{a_0 b_0}, \tag{7.}$$

wenn

$$\begin{cases}\alpha = (-1)^{a_0}\,\alpha_0^2 \ (\mathfrak{p}_\infty),\\ \beta = (-1)^{b_0}\,\beta_0^2 \ (\mathfrak{p}_\infty).\end{cases}$$

Aus den Auswertungsgleichungen (5.)—(7.) für das Symbol $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ ersieht man sofort die Gültigkeit des sogenannten *Zerlegungssatzes*:

$$\left(\frac{\alpha, \beta_1 \beta_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha, \beta_1}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha, \beta_2}{\mathfrak{p}}\right) \text{ und } \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha_1, \beta}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha_2, \beta}{\mathfrak{p}}\right),$$

da die Exponenten von -1 in den Auswertungsgleichungen lineare Formen in

[1]) *K. Hensel*, Zahlentheorie, Leipzig 1913, S. 328, Gl. (8).

[2]) *H. Hasse*, Zur Theorie des quadratischen *Hilbert*schen Normenrestsymbols für einen Primteiler $\mathfrak{l}$ der 2, dieses Journal, Bd. 153, S. 76 ff.

jeder der Exponentenreihen $a_0, \ldots$ und $b_0, \ldots$ von α und β sind.

Das eingeführte Symbol $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ stimmt für zwei algebraische Zahlen α, β aus k vollständig mit dem von *Hilbert* eingeführten Normenrestsymbol überein, nur mit dem allerdings ganz unwesentlichen Unterschied, daß *Hilbert* jenes Symbol nur für ganze α, β definiert, während hier beliebige, ganze oder gebrochene α, β aus k zugelassen sind. Die Übereinstimmung ergibt sich leicht aus den späteren Entwicklungen der *Hilbert-Furtwängler*schen Theorie des relativquadratischen Körpers[1]). Für die Primteiler $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ stimmen die Symbole $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}_\infty^{(i)}}\right)$ offensichtlich mit den von *Hilbert* eingeführten Vorzeichensymbolen[2]) $\left(\frac{\alpha, \beta}{1^{(i)}}\right)$ überein, denn der Wert eines α aus k für eine Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ ist nach Definition identisch mit einer der reellen zu α konjugierten.

Wegen dieser Übereinstimmung genügt das hier eingeführte Symbol dem von Herrn *Furtwängler* bewiesenen allgemeinen quadratischen Reziprozitätsgesetz:

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = +1; \quad \text{(Produktsatz)},$$

wo das Produkt über alle Primteiler von k einschließlich der $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ zu erstrecken ist, und zwar natürlich für beliebige ganze oder gebrochene α, β aus k, (da ja das Symbol für gebrochene Koeffizienten α, β stets auf ein ihm für alle Stellen gleiches mit ganzen Koeffizienten zurückgeführt werden kann).

Für die Darstellbarkeit der Null durch ternäre Formen und beliebiger Zahlen $\mu \neq 0$ durch binäre Formen in $k(\mathfrak{p})$ ergeben sich dann unter Berufung auf die Auswertungsgesetze (5.)—(7.) für das *Hilbert*sche Symbol genau wie in H I (Satz 4, 5) die beiden Sätze:

Satz 3. *Zu jeder ternären Form f in $k(\mathfrak{p})$ existiert eine gegen beliebige Transformation und Multiplikation von f in $k(\mathfrak{p})$ invariante Einheit $\hat{c}_\mathfrak{p} = \hat{c}_\mathfrak{p}(f)$, die sich aus einer zu f in $k(\mathfrak{p})$ äquivalenten reinen Form*

$$f_0 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2$$

durch

$$\hat{c}_\mathfrak{p}(f) = \hat{c}_\mathfrak{p}(f_0) = \left(\frac{-\alpha_1 \alpha_3, -\alpha_2 \alpha_3}{\mathfrak{p}}\right)$$

berechnet. Die Form f stellt die Null dann und nur dann in $k(\mathfrak{p})$ dar, wenn ihr $\hat{c}_\mathfrak{p} = +1$ ist.

Liegt eine ternäre Form f aus k vor, so ist also das auf alle $\mathfrak{p}$ erstreckte System $(\hat{c}_\mathfrak{p})$ invariant gegen beliebige Transformation und Multiplikation von f in k und genügt der Bedingung:

---

[1]) Siehe etwa *Ph. Furtwängler*, Reziprozitätsgesetze für Primzahlexponenten, II, Math. Ann. 72, S. 378 f. (dort nur für ungerades l, läßt sich nach Math. Ann. 74, S. 424 ff. auf $l = 2$ übertragen).

[2]) *Hilbert*, Über die Theorie der relativ-*Abel*schen Zahlkörper, Acta Math. 26 oder Gött. Nachr. 1898.

$$\prod_{\mathfrak{p}} \hat{c}_{\mathfrak{p}} = +1.$$

Satz 4. *Zu jeder binären Form f in $k(\mathfrak{p})$ der Invariante $\delta_{\mathfrak{p}}$ existiert eine gegen beliebige Transformation von f in $k(\mathfrak{p})$ invariante Einheit $\check{c}_{\mathfrak{p}} = \check{c}_{\mathfrak{p}}(f)$, die sich aus einer zu f in $k(\mathfrak{p})$ äquivalenten reinen Form*

$$f_0 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$$

durch

$$\check{c}_{\mathfrak{p}}(f) = \check{c}_{\mathfrak{p}}(f_0) = \left(\frac{\alpha_1, -\delta_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha_2, -\delta_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}}\right)$$

berechnet. Die Form f stellt alle und nur die Zahlen $\mu \neq 0$ in $k(\mathfrak{p})$ dar, für die

$$\left(\frac{\mu, -\delta_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

ist.

Liegt eine binäre Form f aus k vor, so ist also das System $(\check{c}_{\mathfrak{p}})$ invariant gegen beliebige Transformation von f in k und genügt wieder die Bedingung:

$$\prod_{\mathfrak{p}} \check{c}_{\mathfrak{p}} = +1.$$

§ 5. Darstellbarkeit der Null in k durch ternäre Formen, Darstellbarkeit in k durch binäre Formen.

Der jetzt zu erbringende Nachweis, daß eine ternäre Form die Null in k darstellt, wenn sie sie in allen $k(\mathfrak{p})$ darstellt, d. h. des Prinzips (I.), S. 114 für diesen Spezialfall, ist bereits von Herrn *Furtwängler* geführt [1]). Dieser beweist a. a. O. für beliebige Grundkörper k:

„*Ist für zwei ganze Zahlen α, β aus k:*

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

so ist α Relativnorm einer Zahl des Körpers $k(\sqrt{\beta})$.“

Die Gültigkeit dieses Satzes ist natürlich nicht an die Voraussetzung, daß α und β ganze Zahlen aus k sind, gebunden.

Ist also die Null durch eine ternäre Form f in allen $k(\mathfrak{p})$ darstellbar und f_0 eine aus f durch Transformation und Multiplikation in k stets herstellbare Form der Gestalt:

$$f_0 = -z^2 + \alpha x^2 + \beta y^2,$$

so ist nach Satz 3:

$$\hat{c}_{\mathfrak{p}}(f) \equiv \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) \equiv +1,$$

also nach dem *Furtwänglerschen* Satz die Gleichung

$$\alpha = \bar{z}^2 - \beta \bar{y}^2$$

mit Zahlen $\bar{y}, \bar{z}$ aus k lösbar, also auch die Gleichung

$$f_0 = -z^2 + \alpha x^2 + \beta y^2 = 0.$$

f_0 und somit f stellt also die Null dann auch in k dar.

---

[1]) *Ph. Furtwängler*, Reziprozitätsgesetze für Primzahlexponenten, III, Math. Ann. 74, S. 429, Satz 18.

Satz 5. *Eine ternäre Form f stellt die Null dann und nur dann in k dar, wenn sie sie in allen $k(\mathfrak{p})$ darstellt, d. h. wenn ihr Invariantensystem $\hat{c}_\mathfrak{p}$ der Bedingung*

$$\hat{c}_\mathfrak{p} \equiv +1$$

genügt.

Daraus ergibt sich wie in H I:

Satz 6. *Eine binäre Form der Invarianten $[\delta]$, $(\check{c}_\mathfrak{p})$ stellt alle und nur die Zahlen $\mu \neq 0$ aus k dar, für die*

$$\left(\frac{\mu, -\delta}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \check{c}_\mathfrak{p}$$

ist.

Da nach den allgemeinen Sätzen über das *Hilbert*sche Normenrestsymbol [1]) das Symbol $\left(\frac{\mu, -\delta}{\mathfrak{p}}\right)$ nur dann für alle μ an jeder Stelle $\mathfrak{p}$ einen vorgegebenen Wert $\check{c}_\mathfrak{p}$ haben kann, wenn $[-\delta] = [1]$ ist, und da dann nach Satz 4 $\check{c}_\mathfrak{p} \equiv +1$ ist, folgt wie H I (Satz 9):

Satz 7. *Eine binäre Form stellt dann und nur dann alle Zahlen μ aus k und dann und nur dann auch die Null in k dar, wenn ihre Invariante $[-\delta] = [1]$ ist.*

Die Darstellbarkeitsbedingung für die Zahlen μ aus k von Satz 6 führt wieder auf gewisse arithmetische Progressionen, in denen die darstellbaren μ enthalten sein müssen. Die Aufstellung dieser Progressionen als Kongruenzbedingungen nach einem geeigneten Idealmodul mit Hilfe der multiplikativen Normalform in k bietet keine prinzipielle Schwierigkeit.

§ 6. Darstellbarkeit der Null durch quaternäre Formen in einem $k(\mathfrak{p})$, Darstellbarkeit in $k(\mathfrak{p})$ durch ternäre Formen.

Für die Darstellbarkeit der Null in $k(\mathfrak{p})$ durch quaternäre Formen gilt wieder (vergl. H I, Satz 10, 11):

Satz 8. *Eine quaternäre Form f stellt die Null stets in $k(\mathfrak{p})$ dar, wenn ihre Invariante $\delta_\mathfrak{p} \neq 1$ ist. Ist aber $\delta_\mathfrak{p} = 1$, so stellt f die Null dann und nur dann in $k(\mathfrak{p})$ dar, wenn in irgendeiner (und damit in jeder) ihr äquivalenten Form der besonderen Gestalt*

$$f_0 = a_1 x_1^2 + \varphi(x_2, x_3, x_4)$$

die Einheit $\hat{c}_\mathfrak{p}(\varphi) = +1$ ist.

Beweis: a.) Den Beweis des ersten Teiles führe ich gleich allgemein (ohne die in H I durchgeführte Trennung der verschiedenen Fälle für p) auf Grund der Eigenschaften des *Hilbert*schen Symbols. Sei

$$f_1 = \alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 + \delta u^2$$

eine zu f in $k(\mathfrak{p})$ äquivalente reine Form, in der die Koeffizienten offenbar so bezeichnet werden dürfen, und ihr Diskriminantenkern

$$\delta_\mathfrak{p} = (\alpha\beta\gamma\delta)_\mathfrak{p} \neq 1. \tag{8.}$$

Es ist zu zeigen, daß f_1 dann die Null in $k(\mathfrak{p})$ darstellt. Dies wird bewiesen sein,

[1]) Siehe die a. S. 115 Anm. 2 und S. 119 Anm. 2 zitierten Arbeiten.

wenn gezeigt ist, daß dann eine Zahl $\mu \neq 0$ aus $k(\mathfrak{p})$ gefunden werden kann, sodaß

$$\mu = \alpha x^2 - \beta y^2 = \gamma z^2 - \delta u^2 \quad (\mathfrak{p}), \tag{9.}$$

also μ durch die beiden binären Formen $\alpha x^2 - \beta y^2$ und $\gamma z^2 - \delta u^2$ in $k(\mathfrak{p})$ darstellbar ist. Für das Bestehen von (9.) ist nach Satz 4 notwendig und hinreichend, daß die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\mu, \alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha, \alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right) \text{ und } \left(\frac{\mu, \gamma\delta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\gamma, \gamma\delta}{\mathfrak{p}}\right) \tag{10.}$$

bestehen. Nun folgt aus den oben zusammengestellten Auswertungsgleichungen (5.)—(7.) für das *Hilbert*sche Symbol, daß, was auch $\mathfrak{p}$ sein mag, stets

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{\mathfrak{L}_\mathfrak{p}(a|b)}$$

gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}$ eine (symmetrische) bilineare Form der Exponentenreihen $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$ aus der multiplikativen Darstellung von α und β für den betr. $k(\mathfrak{p})$ sind; dabei ist die Determinante von $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}$ stets mod. 2 von Null verschieden.

Seien also $a_0, a_1, \ldots$; $b_0, b_1, \ldots$; $c_0, c_1, \ldots$; $d_0, d_1, \ldots$, kurz a, b, c, d die Exponentenreihen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und x die von μ. Dann besagen die Gleichungen (10.):

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_\mathfrak{p}(x|a+b) \equiv \mathfrak{L}_\mathfrak{p}(a|a+b) \mod 2, \\ \mathfrak{L}_\mathfrak{p}(x|c+d) \equiv \mathfrak{L}_\mathfrak{p}(c|c+d) \mod 2. \end{cases} \tag{11.}$$

Es ist nur zu zeigen, daß diese beiden linearen Kongruenzen für die x_i unter der angegebenen Bedingung (8.) stets lösbar sind. Sind nun die links stehenden beiden linearen Formen der x linear unabhängig mod. 2, so sind diese Kongruenzen stets lösbar, da dann mindestens eine der aus den Koeffizienten der x gebildeten Determinanten 2. Ordnung mod. 2 von Null verschieden ist [1]). Ist aber identisch in den x:

$$s\,\mathfrak{L}_\mathfrak{p}(x|a+b) + t\,\mathfrak{L}_\mathfrak{p}(x|c+d) \equiv 0 \mod 2;\ (s, t = 0 \text{ oder } 1, \text{ nicht beide } 0),$$

d. h.

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{p}\,[x|s\,(a+b) + t\,(c+d)] \equiv 0 \mod 2,$$

so folgt aus dem Nichtverschwinden der Determinante von $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}$ mod. 2, daß die sämtlichen Größen

$$s\,(a_i + b_i) + t\,(c_i + d_i) \equiv 0 \mod 2$$

sind. Ist dabei eine der Größen s, t, etwa $t = 0$, also $s = 1$ und alle $a_i + b_i \equiv 0$ mod. 2, so besteht die erste der Kongruenzen (11.) identisch für jedes System x, sodaß die beiden Kongruenzen (11.) sicher lösbar sind. Diese können also überhaupt nur so unlösbar sein, daß die linken Seiten linear abhängig und dabei $s = t = 1$ ist, d. h. nur dann, wenn alle Größen

$$a_i + b_i + c_i + d_i \equiv 0 \mod 2$$

sind, da diese Größen aber die Exponentenreihe von $\alpha\beta\gamma\delta$ darstellen, nur dann wenn $\alpha\beta\gamma\delta$ Quadrat in $k(\mathfrak{p})$, also $(\alpha\beta\gamma\delta)_\mathfrak{p} = \delta_\mathfrak{p} = 1$ ist. Ist dies nicht der Fall,

---

[1]) Daß die resultierende Lösung x eventuell identisch Null sein kann, ist hier ohne Bedeutung, da dem Exponentensystem $x = 0$ ebenfalls ein μ aus $k(\mathfrak{p})$, nämlich jedes Quadrat aus $k(\mathfrak{p})$ entspricht.

so sind die Kongruenzen (11.) stets lösbar, und damit ist nach dem schon Gesagten der erste Teil des Satzes 8 bewiesen.

b.) Der Beweis des zweiten Teiles von Satz 8 läßt sich wörtlich aus H I, Beweis zu Satz 11, übertragen, sodaß ich darauf nicht näher einzugehen brauche.

Aus Satz 8 ergibt sich dann sofort, wie in H I, folgender Satz über die Darstellbarkeit in $k(\mathfrak{p})$ durch ternäre Formen:

Satz 9. *Eine ternäre Form der Invariante $\delta_\mathfrak{p}$ stellt in $k(\mathfrak{p})$ entweder alle Zahlen μ (inkl. 0) dar, oder nur alle μ (exkl. Null), für die der Kern $\mu_\mathfrak{p} \neq -\delta_\mathfrak{p}$ ist, je nachdem ihre Invariante $\hat{c}_\mathfrak{p}$ den Wert $+1$ oder -1 hat.*

§ 7. Darstellbarkeit der Null in k durch quaternäre Formen, Darstellbarkeit in k durch ternäre Formen.

Ich beweise jetzt das in der Einleitung genannte Prinzip (I.) für die Darstellbarkeit der Null durch quaternäre Formen:

Satz 10. *Eine quaternäre Form stellt die Null dann und nur dann in k dar, wenn sie sie in allen $k(\mathfrak{p})$ darstellt.*

Beweis: Sei

$$f_0 = \alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 + \delta u^2$$

eine quaternäre Form aus k, die zum Beweis als reine Form mit so bezeichneten Koeffizienten angenommen werden darf, und stelle f_0 die Null in jedem $k(\mathfrak{p})$ dar. Dann gibt es also in jedem $k(\mathfrak{p})$ einen Kern $\mu_\mathfrak{p}$ und Zahlen $x_\mathfrak{p}, y_\mathfrak{p}, z_\mathfrak{p}, u_\mathfrak{p}$, so daß

$$\mu_\mathfrak{p} = \alpha x_\mathfrak{p}^2 - \beta y_\mathfrak{p}^2 - \gamma z_\mathfrak{p}^2 - \delta u_\mathfrak{p}^2 \quad (\mathfrak{p}) \tag{12.}$$

ist, und $\mu_\mathfrak{p}$ darf von Null verschieden angenommen werden (Satz 7, S. 123 für einen einzelnen $k(\mathfrak{p})$). Ich zeige, daß man ein $\mu \neq 0$ und Zahlen x, y, z, u aus k so finden kann, daß

$$\mu = \alpha x^2 - \beta y^2 = \gamma z^2 - \delta u^2 \tag{13.}$$

ist, also f_0 die Null (nicht identisch) in k darstellt.

Bezeichne dazu $\overline{\mathfrak{p}}$ alle zu 2 primen Teiler der Kerne von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ [1]), ferner $\mathfrak{l}$ alle Teiler der 2 und $\overline{\pi}$ bzw. λ Primzahlen für diese $\overline{\mathfrak{p}}$ bzw. $\mathfrak{l}$ aus k, d. h. genau durch $\overline{\mathfrak{p}}$ bzw. $\mathfrak{l}$ teilbare Zahlen aus k, und seien für diese $\overline{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{l}$ und die $\mathfrak{p}_\infty$:

$$\begin{aligned}
\mu_{\overline{\mathfrak{p}}} &= \overline{\pi}^{\bar{a}}\, \varepsilon_{\overline{\mathfrak{p}}} \;\; ; \; (\bar{a} = 0 \text{ oder } 1;\; \varepsilon_{\overline{\mathfrak{p}}} \text{ Einheit aus } k(\overline{\mathfrak{p}})),\\
\mu_\mathfrak{l} &= \lambda^a\, \varepsilon_\mathfrak{l} \;\; ; \; (a = 0 \text{ oder } 1;\; \varepsilon_\mathfrak{l} \text{ Einheit aus } k(\mathfrak{l})),\\
\mu_{\mathfrak{p}_\infty} &= (-1)^b; \; (b = 0 \text{ oder } 1)
\end{aligned}$$

der Gleichung (12.) genügende Kerne $\mu_\mathfrak{p}$. Da in einem $k(\overline{\mathfrak{p}})$ jede Einseinheit (vom ersten Grade an) Quadrat ist, in einem $k(\mathfrak{l})$ jede Einseinheit vom $2e+1$-ten Grade an, wenn e die Ordnung von $\mathfrak{l}$ ist [2]), so unterscheidet sich ein μ aus k, das den Kongruenzen

$$\begin{aligned}
\mu &\equiv \mu_{\overline{\mathfrak{p}}} \equiv \overline{\pi}^{\bar{a}}\, \varepsilon_{\overline{\mathfrak{p}}} \text{ mod. } \overline{\mathfrak{p}}^{1+\bar{a}},\\
\mu &\equiv \mu_\mathfrak{l} \equiv \lambda^a\, \varepsilon_\mathfrak{l} \text{ mod. } \mathfrak{l}^{2e+1+a}
\end{aligned}$$

---

[1]) D. h. alle in jenen Zahlen in ungerader Potenz aufgehenden Primteiler, deren Anzahl endlich ist.

[2]) Folgt aus der multiplikativen Normalform, diese Arbeit, S. 115.

gemäß bestimmt wird, und das die durch die $\mu_{\mathfrak{p}_\infty} = (-1)^b$ bestimmte „*Signatur*“ σ hat, von den sämtlichen genannten $\mu_{\bar{\mathfrak{p}}}, \mu_{\mathfrak{l}}, \mu_{\mathfrak{p}_\infty}$ nur um Quadratzahlen der betr. $k(\mathfrak{p})$, ist also gleichzeitig für alle $k(\bar{\mathfrak{p}})$, $k(\mathfrak{l})$, $k(\mathfrak{p}_\infty)$ durch die beiden binären Formen aus (13.) darstellbar.

Diese Kongruenzbedingungen für die verschiedenen Primteilerpotenzmoduln lassen sich nach elementaren Sätzen in eine einzige, ihnen völlig gleichwertige

$$\mu \equiv \Pi\, \bar{\pi}^{\bar{a}} \cdot \Pi\, \lambda^a \cdot \varepsilon \bmod. \Pi \mathfrak{p}^{1+\bar{a}} \cdot \Pi \mathfrak{l}^{2e+1+a} \tag{14.}$$

zusammenziehen, in der die Produkte über alle genannten $\bar{\mathfrak{p}}$, sowie über alle Teiler $\mathfrak{l}$ der 2 zu erstrecken sind, und ε eine zu den sämtlichen $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{l}$ prime Zahl aus k bedeutet.

Man kann nun ein (14.) befriedigendes μ aus k finden, das außer durch $\Pi\, \bar{\mathfrak{p}}^{\bar{a}} \cdot \Pi \mathfrak{l}^a$ nur noch durch ein einziges von den $\bar{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{l}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{r}$ aus k teilbar ist und außerdem die vorgeschriebene Signatur σ hat. Definiert man nämlich die Idealklassen im allgemeinsten Sinne in k nach dem Strahl der total positiven Zahlen die $\equiv 1$ mod. $\Pi\, \bar{\mathfrak{p}}\ \Pi \mathfrak{l}^{2e+1}$ sind, so gibt es bekanntlich in jeder dieser Idealklassen unendlich viele Primideale [1]). Sei dann σ_1 die Signatur von $\Pi\, \bar{\pi}^{\bar{a}} \cdot \Pi \mathfrak{l}^a$ und C diejenige der eben definierten Idealklassen, die durch den Kongruenzwert von ε mod. $\Pi\, \bar{\mathfrak{p}} \cdot \Pi \mathfrak{l}^{2e+1}$ und die Signatur $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ bestimmt wird, ferner C_1 die Klasse, der das Ideal $\Pi \left(\frac{\bar{\mathfrak{p}}}{\bar{\pi}}\right)^{\bar{a}} \cdot \Pi \left(\frac{\mathfrak{l}}{\lambda}\right)^a$ angehört, so gibt es in der Klasse $\frac{C}{C_1}$ ein von den $\bar{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{l}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{r}$. Dann ist

$$(\xi) = \Pi \left(\frac{\bar{\mathfrak{p}}}{\bar{\pi}}\right)^{\bar{a}} \cdot \Pi \left(\frac{\mathfrak{l}}{\lambda}\right)^a \cdot \mathfrak{r} \tag{15.}$$

ein zu $C_1 \frac{C}{C_1} = C$ gehöriges Hauptideal, so daß also

$$\xi \equiv \varepsilon \bmod. \Pi\, \bar{\mathfrak{p}} \cdot \Pi \mathfrak{l}^{2e+1}$$

ist und ξ die Signatur $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ hat. Weiter ist dann

$$\mu = \Pi\, \bar{\pi}^{\bar{a}} \cdot \Pi\, \lambda^a\, \xi$$

eine (14.) befriedigende Zahl aus k mit der Signatur $\sigma_1 \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1} = \sigma$, die wegen (15.) die Primidealzerlegung $\Pi\, \mathfrak{p}^{\bar{a}} \cdot \Pi \mathfrak{l}^a \cdot \mathfrak{r}$ hat.

Dies μ ist also für die sämtlichen $k(\bar{\mathfrak{p}})$, $k(\mathfrak{l})$, $k(\mathfrak{p}_\infty)$ durch die beiden binären Formen aus (13.) darstellbar. Dasselbe gilt auch für alle übrigen $k(\mathfrak{p})$. Denn die nach Satz 4 (S. 122) hierfür notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\left(\frac{\mu, \alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha, \alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right); \quad \left(\frac{\mu, \gamma\delta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\gamma, \gamma\delta}{\mathfrak{p}}\right)$$

sind für die übrigen, von den $\bar{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}$ verschiedenen Primteiler $\mathfrak{p}$ von selbst erfüllt, da diese $\mathfrak{p}$ nicht in den Kernen von $\mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ aufgehen und dann die *Hilbert*schen Symbole links und rechts $+1$ sind (Gl. (5.), S. 120). Nach dem Produktsatz für das

---

[1]) Siehe etwa *T. Takagi*, Über eine Theorie des relativ-*Abel*schen Zahlkörpers, Journ. of the Coll. of. Science, XLI, 9, Tokyo 1920, S. 19.

*Hilbert*sche Symbol müssen also beide Bedingungen auch für das allein noch übrige $\mathfrak{r}$ bestehen. Dann ist aber μ nach Satz 6 (S. 123) durch die beiden binären Formen aus (13.) in k darstellbar und damit Satz 10 bewiesen.

Für die Darstellbarkeit der Null in k durch quaternäre Formen erhält man somit folgendes Kriterium:

Satz 11. *Eine quaternäre Form der Invariante* $[\delta]$ *stellt die Null dann und nur dann in k dar, wenn in irgendeiner ihr in k äquivalenten Form der besonderen Gestalt*

$$f_0 = \alpha_1 x_1^2 + \varphi(x_2, x_3, x_4)$$

$$\hat{c}_\mathfrak{p}(\varphi) = +1 \text{ für } \left(\frac{\delta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

ist.

Ferner ergibt sich unmittelbar für die Darstellbarkeit beliebiger Zahlen μ in k durch ternäre Formen:

Satz 12. *Eine ternäre Form der Invarianten* $[\delta]$ *und* $(\hat{c}_\mathfrak{p})$ *stellt alle und nur die Zahlen* μ $(\neq 0)$ *in k dar, die den Bedingungen*

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq \left(\frac{-\delta}{\mathfrak{p}}\right) \text{ für } \hat{c}_\mathfrak{p} \neq +1$$

genügen, die Null und gleichzeitig alle Zahlen $\mu \neq 0$ *aus k dann und nur dann, wenn*

$$\hat{c}_\mathfrak{p} \equiv +1$$

ist.

Die Darstellbarkeitsbedingungen dieses Satzes für von Null verschiedene μ führen wieder leicht zu gewissen arithmetischen Progressionen (Kongruenzbedingungen), denen die darstellbaren μ angehören müssen.

Als einfachste Anwendung behandle ich noch die spezielle Form $x^2 + y^2 + z^2$, deren Invarianten $[\delta] = [1]$ und $\hat{c}_\mathfrak{p} \equiv \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{p}}\right)$ sind. Das Symbol $\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{p}}\right)$ ist nach (5.), S. 120 für zu 2 prime $\mathfrak{p}$ stets $+1$, für die $\mathfrak{p}_\infty$ nach (7.), S. 120 gleich -1. Für die Teiler $\mathfrak{l}_i$ der 2 werde ich an anderer Stelle im Zusammenhang mit den Reziprozitätsgesetzen beweisen, daß $\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{l}_i}\right) = (-1)^{e_i f_i}$ ist, wenn e_i und f_i Ordnung und Grad von $\mathfrak{l}_i$ bezeichnen. Die angegebenen Werte für dieses Symbol stehen offensichtlich in Einklang mit dem allgemeinen quadratischen Reziprozitätsgesetz in k. Denn es ergibt sich

$$\prod_\mathfrak{p} \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{\sum_i e_i f_i} (-1)^r,$$

und da $\sum_i e_i f_i$ gleich dem Grad n des Körpers k ist, und die Anzahl r der reellen konjugierten zu k von n stets um eine gerade Zahl unterschieden ist, folgt, wie es sein soll

$$\prod_\mathfrak{p} \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{p}}\right) = +1.$$

Für die ternäre Form $x^2 + y^2 + z^2$ ergeben sich nach Satz 5 (S. 123) und 12 (S. 127) folgende beiden Sätze:

Satz 13. *Die Gleichung*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

ist dann und nur dann in nicht sämtlich verschwindenden Zahlen x, y, z aus k lösbar, wenn k total imaginär ist, und die Primzahl 2 in k eine Zerlegung

$$2 = \mathfrak{l}_1^{e_1} \dots \mathfrak{l}_g^{e_g}; \quad (\mathfrak{l}_i \text{ vom Grade } f_i)$$

hat, in der für kein $\mathfrak{l}_i$ zugleich e_i und f_i ungerade sind.

Satz 14. *Die Gleichung*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mu; \quad (\mu \text{ Zahl} \neq 0 \text{ aus } k)$$

ist dann und nur dann durch Zahlen x, y, z aus k lösbar, wenn μ total positiv und $-\mu$ für die Bereiche aller derjenigen Teiler $\mathfrak{l}_i$ der 2, für die sowohl Ordnung e_i als Grad f_i ungerade sind, kein Quadrat ist. Setzt man speziell μ total positiv und prim zu 2 voraus, so darf also für die genannten $\mathfrak{l}_i$ die Kongruenz

$$\mu + \xi^2 = 0 \bmod \mathfrak{l}_i^{2e_i+1}$$

nicht lösbar sein [1]).

§ 8. n-äre Formen.

Für die Darstellbarkeit der Null durch Formen von mehr als 4 Variablen und somit für die Darstellbarkeit von Null verschiedener Zahlen durch Formen von mehr als 3 Variablen kommen, wie im rationalen Körper, nur noch Vorzeichenbedingungen in Frage. Ich zeige zuerst:

Satz 15. *Eine n-äre Form ($n \geqq 5$) stellt die Null in jedem „endlichen" $k(\mathfrak{p})$ dar, in einem $k(\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)})$ dann und nur dann, wenn ihr Trägheitsindex J_ν für diesen Bereich von* 0 und *n verschieden ist.*

Beweis: Für die Teiler $\mathfrak{p}$ der endlichen p folgt der Satz unmittelbar aus dem entsprechenden, in H I bewiesenen Satz 19, da ja aus der Darstellbarkeit der Null im rationalen $K(p)$ ohne weiteres die Darstellbarkeit in den zugehörigen algebraischen Erweiterungen $k(\mathfrak{p})$ folgt.

Für jede der r Stellen $\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}$ hat ferner eine quadratische Form einen bestimmten Trägheitsindex J_ν, der invariant gegen Transformation in $k(\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)})$ ist. Ist dieser 0 oder n, so ist die betr. Form einer reinen Quadratsumme (mit positivem oder negativem Zeichen) in $k(\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)})$ äquivalent, kann also die Null in diesem $k(\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)})$ nicht darstellen. Ist aber $J_\nu \neq 0, n$, so kommen in jeder zu der betr. Form in $k(\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)})$ äquivalenten reinen Form positive und negative Glieder vor, sodaß die Null in $k(\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)})$ darstellbar ist.

Für die Darstellbarkeit von Null verschiedener Zahlen ergibt sich:

Satz 16. *Eine n-äre Form ($n \geqq 4$) stellt in jedem endlichen $k(\mathfrak{p})$ alle von Null verschiedenen Zahlen dar, in einem $k(\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)})$ nur solche μ ($\neq 0$) die den Bedingungen genügen:*

---

[1]) Man erkennt leicht die Identität dieser Bedingung mit der von Herrn *Siegel* a. a. O. S. 268, Satz 7 erhaltenen.

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}\right) = +1, \text{ wenn } J_\nu = 0,$$

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}\right) = -1, \text{ wenn } J_\nu = n,$$

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}\right) \text{ beliebig, wenn } 0 < J_\nu < n.$$

Der Beweis des Prinzips (I.) in der Form:

Satz 17. *Eine n-äre Form* ($n \geqq 5$) *stellt die Null dann und nur dann in k dar, wenn sie sie in allen* $k(\mathfrak{p})$ *darstellt,*

gestaltet sich ganz analog zu dem oben ausgeführten Beweis von Satz 10, wenn man diesen entsprechend wie in H I, S. 146f. modifiziert, sodaß ich darauf nicht näher eingehe. Damit ist dann das Prinzip (I.) für die Darstellbarkeitsbeziehungen vollständig bewiesen. Aus Satz 15, 16 folgen somit folgende Kriterien für die Darstellbarkeit in k:

Satz 18. *Eine n-äre Form* ($n \geqq 5$) *stellt die Null dann und nur dann in k dar, wenn ihre r Trägheitsindizes* $J_1, \ldots, J_r$ *sämtlich von* 0 *und n verschieden sind.*

Satz 19. *Eine n-äre Form* ($n \geqq 4$) *stellt alle und nur die Zahlen* $\mu(\neq 0)$ *in k dar, die resp. den Bedingungen genügen:*

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}\right) &= +1, \text{ wenn } J_\nu = 0,\\ \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}\right) &= -1, \text{ wenn } J_\nu = n,\end{aligned}\right\};\ (\nu = 1, 2, \ldots, r),$$

deren Signatur $\operatorname{sgn}.\ \mu = \left[\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(1)}}\right), \ldots, \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(r)}}\right)\right] = [(-1)^{b_1}, \ldots, (-1)^{b_r}]$ *also an den Stellen, für die* $J_\nu = 0$ *oder n ist, eine* $+1$ *bzw.* -1 *hat, sonst beliebig ist.*

Damit habe ich die Kriterien für die Darstellbarkeit beliebiger Zahlen aus k durch irgendwelche quadratische Formen aus k in allen Fällen angegeben. Ich fasse zum Schluß die Einzelresultate, wie in H I, in folgende beiden Tabellen zusammen:

1) Darstellbarkeit von Null verschiedener Zahlen μ in k.

n	Invarianten	Darstellbarkeitskriterien
1	$[\delta]$	$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \left(\frac{\delta}{\mathfrak{p}}\right)$
2	$[\delta]$; $(\check{c}_\mathfrak{p})$	$\left(\frac{\mu, -\delta}{\mathfrak{p}}\right) \equiv (\check{c}_\mathfrak{p})$
3	$[\delta]$; $(\hat{c}_\mathfrak{p})$	$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq \left(\frac{-\delta}{\mathfrak{p}}\right)$ für $\hat{c}_\mathfrak{p} \neq +1$
4, 5, ...	$[\delta]; J_1, \ldots, J_r$	$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}\right) &= +1 \text{ für } J_\nu = 0\\ \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}\right) &= -1 \text{ für } J_\nu = n\end{aligned}\right\};\ (\nu = 1, 2, \ldots, r)$

2) Darstellbarkeit der Null in k.

n	Invarianten	Darstellbarkeitskriterien
2	$[\delta]$; $(\check{c}_\mathfrak{p})$	$\left(\frac{-\delta}{\mathfrak{p}}\right) \equiv +1$
3	$[\delta]$; $(\hat{c}_\mathfrak{p})$	$\hat{c}_\mathfrak{p} \equiv +1$
4	$[\delta]$; $(\hat{c}_\mathfrak{p}(\varphi))$	$\hat{c}_\mathfrak{p}(\varphi) = +1$ für $\left(\frac{\delta}{\mathfrak{p}}\right) = +1$
5, 6, ...	$[\delta]; J_1, \ldots, J_\nu$	$0 < J_\nu < n$; $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$

Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren.

Von Herrn *Robert Remak* in Berlin.

Das Produkt zweier Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer endlichen Gruppe heißt dann ein direktes, wenn jedes Element von $\mathfrak{A}$ mit jedem Element von $\mathfrak{B}$ vertauschbar (abgekürzt $\mathfrak{A}$ ew. v. m. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ elementweise vertauschbar mit $\mathfrak{B}$) und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ teilerfremd, d. h. der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{E}$$

gleich dem Einheitselement ist. (Das Einheitselement E wird, als Gruppe aufgefaßt, $\mathfrak{E}$ geschrieben). $\times$ ist das Zeichen der direkten Multiplikation.

Der Satz: „*Ist eine endliche Gruppe auf zweierlei Art in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt, so sind die Faktoren beider Zerlegungen, von der Reihenfolge abgesehen, paarweise einander zentral isomorph*“, wurde zuerst ausgesprochen von Herrn *Maclagan-Wedderburn* [1]), aber mit einem unvollständigen Beweise versehen. Den ersten vollständigen Beweis lieferte ich in meiner Dissertation [2]). Zwei einfachere Beweise hat Herr *Otto Schmidt* veröffentlicht [3]) [4]). Unter Benutzung eines Hilfssatzes des Herrn *Schmidt* lieferte ich einen Beweis, der eine Ausgestaltung des Gedankenganges des Herrn *Maclagan-Wedderburn* ist [5]). Dieser Beweis enthält eine Lücke. Im Hauptfalle B) Unterfall 1) wird nicht bewiesen, daß $\mathfrak{D}_1$ eine *invariante* Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist. Dies erledigt sich dadurch, daß eine genauere Betrachtung $\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G})$ ergeben wird. Ich will im folgenden unter (A) diesen Beweis in berichtigter Fassung geben, unter (B) einen weiteren Beweis, der im wesentlichen eine zweckmäßigere Fassung des Grundgedankens meiner Dissertation darstellt. Die Hilfssätze werde ich, die einfachsten ohne Beweis, für beide gemeinsam voranschicken und je nachdem, für welchen der beiden Beweise sie benutzt werden, mit (A), (B) oder (A)(B) bezeichnen. Es wird Hilfssatz 5 in seiner strengeren, von Herrn *Schmidt* herrührenden Fassung nur für den Beweis (A) gebraucht, eben so die Hilfssätze 7 und 8 nur für den Beweis (A); Hilfssatz 9 nur für den Beweis (B).

---

[1]) Annals of Mathematics, 2. series, vol. 10 p. 173 (July 1909). „On the Direct Product in the Theory of Finite Groups“.

[2]) Dieses Journ. Bd. 139, S. 293—308.

[3]) Sitzungsber. d. Physiko-mathemat. Gesellsch. an d. St. Wladimir-Universität in Kiew 1912.

[4]) Bull. de la Soc. math. de France, Tome XLI, 1913, S. 161—164, siehe auch: *A. Speiser*, Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, Berlin 1923, § 36, S. 89—90.

[5]) Sitzungsber. d. Physiko-Mathemat. Ges. an d. St. Wladimir-Universität in Kiew 1913.

(A) (B) Hilfssatz 1: *Jedes Element eines direkten Produktes ist eindeutig durch Komponenten darstellbar, (d. h. als Produkt von je einem Element aus jedemFaktor)*:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_r,$$
$$H = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r,$$

($\times$ Zeichen der eindeutigen Komponentendarstellung). Wenn $\mathfrak{G} < \mathfrak{H}$, ($\mathfrak{G}$ Untergruppe von $\mathfrak{H}$), so bilden die sämtlichen $\mathfrak{A}_1$-Komponenten der Elemente von $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{A}_1'$ von $\mathfrak{A}_1$, die auch die $\mathfrak{A}_1$-Komponente von $\mathfrak{G}$ heißen möge.

(A) (B) Hilfssatz 2: *Sind A und B vertauschbare Elemente eines direkten Produktes, so ist jede Komponente von A mit jeder Komponente von B vertauschbar.*

Korollar: *Sind A und B vertauschbare Elemente eines direkten Produktes, so ist A mit jeder Komponente von B vertauschbar.*

Die Gruppe der invarianten Elemente von $\mathfrak{A}$ heiße das Zentrum von $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})$.

(A) (B) Hilfssatz 3: *Das Zentrum eines direkten Produktes ist das direkte Produkt der Zentren der Faktoren:*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_r) = \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_2) \times \cdots \times \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_r).$$

Zwei Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Gruppe $\mathfrak{H}$ heißen dann *zentral* isomorph (Zeichen $\underline{\sim}$), wenn man aus jedem Element von $\mathfrak{A}$ das zugeordnete in $\mathfrak{B}$ durch Multiplikation mit einem Element des Zentrums von $\mathfrak{H}$ erhält.

(A) (B) Hilfssatz 4: *Wenn*

$$\mathfrak{A} \underline{\sim} \mathfrak{B}$$

und

$$\mathfrak{A} \underline{\sim} \mathfrak{C},$$

so ist:

$$\mathfrak{B} \underline{\sim} \mathfrak{C}.$$

(B) Hilfssatz 5: *Wenn*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C},$$

so ist:

$$\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C},$$

denn beide sind isomorph der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}$. ($\sim$ ist das Zeichen des gewöhnlichen ein-eindeutigen Isomorphismus.) *Wenn* $\mathfrak{A} < \mathfrak{z}(\mathfrak{H})$, *so ist* $\mathfrak{B} \underline{\sim} \mathfrak{C}$.

In dieser Fassung wird der Hilfssatz für den Beweis (B) ausreichen. In der schärferen Fassung des Herrn *Schmidt* lautet er:

(A) Hilfssatz 5: *Wenn*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C},$$

so ist

$$\mathfrak{B} \underline{\sim} \mathfrak{C}.$$

Beweis: Es sei B ein Element von $\mathfrak{B}$ nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$$

in Komponenten zerlegt:

$$B = A' \times C.$$

Dann ist nach Hilfssatz 2, Korollar irgendein Element A von $\mathfrak{A}$ mit B, also mit

jeder Komponente von B, also auch mit A' vertauschbar. Also

$$A' < \mathfrak{z}(\mathfrak{A}) < \mathfrak{z}(\mathfrak{H}).$$

($<$ bedeutet für Elemente „enthalten in".) Es ist aber auch

$$C = A'^{-1} \times B$$

die Komponentendarstellung von C nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}.$$

Die Zuordnung von B zu C ist also umkehrbar eindeutig.

(A) (B) Hilfssatz 6: *Wenn*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A} < \mathfrak{C} < \mathfrak{H},$$

so ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

Beweis: Es ist

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{C} \text{ und } (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) < \mathfrak{C},$$

also

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) < \mathfrak{C}.$$

Ferner sei

$$C = A \times B$$

die Zerlegung eines Elementes C von $\mathfrak{C}$ in Komponenten nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}.$$

Es ist

$$C < \mathfrak{C}, \quad A < \mathfrak{A} < \mathfrak{C},$$

also

$$B = A^{-1} \cdot C < \mathfrak{C}, \quad B < (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

also

$$\mathfrak{C} < \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

also

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

Korollar: *Wenn*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A} < \mathfrak{C} < \mathfrak{H}$$

und $\mathfrak{C}$ *direkt unzerlegbar, so ist* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$.

(A) Hilfssatz 7: *Sind zwei teilerfremde Untergruppen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{H}$ *einander zentral isomorph, so sind es kommutative Gruppen.*

Beweis: Es bedeute $\mathfrak{D}$ die Gruppe der Elemente, die durch den zentralen Isomorphismus sich selber zugeordnet werden, die also $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemeinsam sein müssen,

$$\mathfrak{D} < (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Teilt man die Elemente von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach denjenigen Elementen des Zentrums von $\mathfrak{H}$, die zum Übergange im zentralen Isomorphismus verwandt werden, in Komplexe ein, so erhält man:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} \sim \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} \sim \mathfrak{K},$$

wo $\mathfrak{K}$ die Gruppe der zum Übergange verwandten invarianten Elemente bedeutet. Wenn also

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{E},$$

so ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E},$$

also

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \sim \mathfrak{K}.$$

Also sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kommutative Gruppen.

Korollar: *Zwei teilerfremde nicht kommutative Gruppen, insbesondere zwei nicht kommutative Faktoren desselben direkten Produktes können einander nicht zentral isomorph sein.*

(A) Hilfssatz 8: *Sind zwei invariante Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Gruppe $\mathfrak{H}$ teilerfremd, so ist ihr Produkt ein direktes.*

Beweis: Wenn

$$A < \mathfrak{A}, \quad B < \mathfrak{B},$$

so ist

$$ABA^{-1}B^{-1} = A \cdot (BA^{-1}B^{-1}) = (ABA^{-1}) \cdot B^{-1}$$

in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthalten, also:

$$ABA^{-1}B^{-1} = E,$$

$$AB = BA,$$

$$\mathfrak{A} \text{ ew. v. m. } \mathfrak{B}.$$

Es war

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{E},$$

also

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}.$$

Korollar: *Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ invariante Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{H}$ und*

$$\text{Ord } (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = \text{Ord } \mathfrak{A} \cdot \text{Ord } \mathfrak{B},$$

so ist

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{E},$$

also

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}.$$

(Ord $\mathfrak{A}$ bedeutet „Ordnung von $\mathfrak{A}$“.)

(B) Hilfssatz 9: *Eine zyklische Gruppe $\mathfrak{P}$ von der Primzahlpotenzordnung p^a, deren Basiselement P sei, hat genau eine und nur eine Untergruppe $\mathfrak{P}_p$ der Ordnung p, nämlich die zyklische Gruppe der Potenzen von $P^{p^{a-1}}$. Diese ist in allen Untergruppen von $\mathfrak{P}$ außer $\mathfrak{E}$ enthalten.*

Korollar: *Wenn*

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{P} < \mathfrak{H},$$

so ist

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}) = \mathfrak{E}$$

dann und nur dann, wenn

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_p) = \mathfrak{E} \text{ oder wenn } P^{p^{a-1}} \not< \mathfrak{A},$$

($\not<$ bedeutet „nicht enthalten in"). Wenn

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}) \neq \mathfrak{E},$$

so ist

$$\mathfrak{P}_p < \mathfrak{A} \text{ oder } P^{p^{a-1}} < \mathfrak{A}.$$

Beweis (A).

Der Satz wird als bekannt vorausgesetzt für alle kommutativen Gruppen [1]). Von der Tatsache, daß die direkt unzerlegbaren kommutativen Gruppen zyklisch und von Primzahlpotenzordnung sind, wird hier nicht noch einmal Gebrauch gemacht. Ich zeige gleichzeitig, daß jeder nicht kommutative Faktor einer Zerlegung einer endlichen Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren einen passend gewählten einer jeden anderen Zerlegung **ersetzen** kann. Der Satz sei bereits bewiesen für alle Gruppen niedrigerer Ordnung als die vorliegende.

Es sei

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R} \\ &= \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_s = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{S},\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zur Abkürzung eingeführt sind. Die Bezeichnung sei ferner so gewählt, daß $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ nicht kommutativ und daß

$$\text{Ord } \mathfrak{A}_1 \leqq \text{Ord } \mathfrak{B}_1.$$

Man bilde das Produkt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{S}.$$

Es sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{G}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist.

Hauptfall I: Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}.$$

Das ist nur dadurch möglich, daß

$$\text{Ord } \mathfrak{A}_1 = \text{Ord } \mathfrak{B}_1$$

und daß

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S}) = \mathfrak{E},$$

weil sonst

$$\text{Ord } \mathfrak{G} < \text{Ord } \mathfrak{H}$$

wäre. Also ist nach Hilfssatz 8

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{S}.$$

Also ist durch Vergleich mit den ursprünglichen Zerlegungen nach (A) Hilfssatz 5

$$\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{B}_1$$

und

$$\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{S}.$$

Dieser zentrale Isomorphismus bewirke für $\nu = 2, 3, \ldots, r$ die Zuordnung

---

[1]) s. *Frobenius* u. *Stickelberger*, „Über Gruppen vertauschbarer Elemente", dieses Journ., Bd. 86, S. 217; vgl. auch *Heinr. Weber*, Lehrb. d. Algebra Bd. II, §§ 11 und 12, S. 38—49, oder z. B. meine Arbeiten, Math. Zeitschr. Bd. 10, S. 12—16; dieses Journ., Bd. 141, S. 245—250.

$$\mathfrak{C}_\nu \simeq \mathfrak{B}_\nu,$$

wo

$$\mathfrak{C}_\nu < \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{B}_\nu < \mathfrak{S}.$$

Da für die Gruppe $\mathfrak{R}$ der zu beweisende Satz bereits gilt, so ist $s = r$ und bei passender Wahl der Bezeichnungen

$$\mathfrak{C}_\nu \simeq \mathfrak{A}_\nu \qquad \text{für } \nu = 2, 3, \ldots, r.$$

Da $\mathfrak{z}(\mathfrak{R}) < \mathfrak{z}(\mathfrak{H})$, gelten die zentralen Isomorphismen auch in $\mathfrak{H}$. Also ist auch

$$\mathfrak{B}_\nu \simeq \mathfrak{A}_\nu \qquad \text{für } \nu = 2, 3, \ldots, r.$$

Es war $$\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{B}_1.$$

Der Satz ist also im Hauptfalle I bewiesen.

Hauptfall II: Es sei $\mathfrak{G}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{H}$; es ist nach Hilfssatz 6:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{R}, \mathfrak{G})$$

und

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \times \mathfrak{S}.$$

Es sind zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem $\mathfrak{A}_1$ zentral isomorph ist einem unzerlegbaren Faktor von $\mathfrak{S}$ (Unterfall 1.) oder von $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G})$ (Unterfall 2.).

Unterfall 1: Es sei die Bezeichnung so gewählt, daß $\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{B}_2$, dann ist nach dem für $\mathfrak{G}$ bereits bewiesenen Satze

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{T},$$

wo

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{B}_3 \times \cdots \times \mathfrak{B}_s.$$

Es ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{S} < \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{G}.$$

Also ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \cdot (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \cdot (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{T}) = \mathfrak{B}_1 (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{T}).$$

Es ist aber

$$\text{Ord } \mathfrak{H} = \text{Ord } \mathfrak{B}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{S} = \text{Ord } \mathfrak{B}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{A}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{T}.$$

Also ist nach Hilfssatz 8, Korollar

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_1 \times (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{T}) = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{T}.$$

Also kann $\mathfrak{A}_1$ einen passend gewählten Faktor der anderen Zerlegung ersetzen, und man kann die Richtigkeit des Satzes schließen wie im Hauptfall I.

Unterfall 2: Es sei

$$\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{D}_1,$$
$$(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{U},$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{S} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{S}.$$

Hiernach wäre

$$\text{Ord } \mathfrak{G} = \text{Ord } \mathfrak{D}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{U} \cdot \text{Ord } \mathfrak{S} \geqq \text{Ord } \mathfrak{A}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{S}.$$

Nach der Definition von $\mathfrak{G}$ ist

$$\text{Ord } \mathfrak{G} \leqq \text{Ord } \mathfrak{A}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{S}.$$

Diese beiden Beziehungen sind aber nur miteinander vereinbar, wenn

$$\text{Ord } \mathfrak{G} = \text{Ord } \mathfrak{A}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{S}.$$

Also ist nach Hilfssatz 8 Korollar

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{S},$$

ferner

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{E},$$

also

$$(\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{G}) = \mathfrak{D}_1,$$

also

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \times \mathfrak{S} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{S},$$

also

$$\mathfrak{A}_1 \simeq (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}).$$

Nach Hilfssatz 7, Korollar kann $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G})$ keinem anderen direkt unzerlegbaren Faktor von

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{R}, \mathfrak{G})$$

als $\mathfrak{A}_1$ zentral isomorph sein und ihn ersetzen. Also ist:

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \times (\mathfrak{R}, \mathfrak{G}).$$

Es ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R} < \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{R},$$

also

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{R} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{G}) \cdot \mathfrak{R} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \cdot \mathfrak{R}.$$

Es ist aber

$$\operatorname{Ord} \mathfrak{H} = \operatorname{Ord} \mathfrak{A}_1 \cdot \operatorname{Ord} \mathfrak{R} = \operatorname{Ord} (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \cdot \operatorname{Ord} \mathfrak{R},$$

also nach Hilfssatz 8, Korollar

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \times \mathfrak{R}.$$

Also ist, da $\mathfrak{B}_1$ unzerlegbar, nach Hilfssatz 6, Korollar

$$(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) = \mathfrak{B}_1,$$

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{G}) \times \mathfrak{S} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{S} = \mathfrak{H},$$

also $\mathfrak{G}$ keine echte Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Der Unterfall II 2 kann also überhaupt nicht eintreten. Da der Satz in den übrigen Fällen bewiesen, für kommutative Gruppen bekannt und für Gruppen der niedrigsten Ordnung trivial ist, so gilt er allgemein.

Beweis (B).

Der Beweis (B) macht Gebrauch von der Tatsache, daß jede kommutative direkt unzerlegbare Gruppe zyklisch und von Primzahlpotenzordnung ist [1]). Der Satz wird aber für kommutative Gruppen nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern mitbewiesen. Die Behauptung wird in drei Teile, Satz 1 bis 3, zerlegt.

Satz 1: *Es sei*

$$(1.) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}, \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_1 \end{aligned}$$

auf zweierlei Art in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt. Dann kann irgend ein kommutativer Faktor der ersten Zerlegung durch einen passend gewählten der zweiten Zerlegung ersetzt ***werden.*** ($\mathfrak{R}$ ist zur Abkürzung eingeführt.)

Beweis: Es sei $\mathfrak{A}_1$ kommutativ, also ist es zyklisch von der Primzahlpotenzordnung p^a. Es seien

$$\mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_2', \ldots \mathfrak{B}_s'$$

[1]) Siehe l. c.

die $\mathfrak{B}_\lambda$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1$. Es sei A_1 ein Basiselement von $\mathfrak{A}_1$. Es werde nach den $\mathfrak{B}_\lambda$ durch Komponenten dargestellt:

$$A_1 = B_1' \times B_2' \times \cdots \times B_s'.$$

Die Ordnungen der $\mathfrak{B}_\lambda'$ sind Teiler von p^a, aber mindestens eine ist gleich p^a, weil sonst die Ordnung der rechten Seite kleiner wäre als die der linken. Es ist

$$A_1^{p^{a-1}} = B_1'^{p^{a-1}} \times B_2'^{p^{a-1}} \times \cdots \times B_m'^{p^{a-1}},$$

wo rechts nur die von E verschiedenen Komponenten aufgeführt sind. Da

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{R}) = \mathfrak{E},$$

so ist nach Hilfssatz 9

$$A_1^{p^{a-1}} \not\subset \mathfrak{R},$$

also sind nicht alle seine Komponenten in $\mathfrak{R}$ enthalten; es sei also z. B.

$$B_1'^{p^{a-1}} \not\subset \mathfrak{R},$$

also ist nach Hilfssatz 9

$$(\mathfrak{B}_1', \mathfrak{R}) = \mathfrak{E}.$$

Es ist:

$$\mathfrak{A}_1 \text{ ew. v. m. } \mathfrak{R},$$

also ist nach Hilfssatz 2, Korollar

$$\mathfrak{B}_1' \text{ ew. v. m. } \mathfrak{R},$$

also

$$\mathfrak{B}_1' \cdot \mathfrak{R} = \mathfrak{B}_1' \times \mathfrak{R}.$$

Es ist

$$\text{Ord } \mathfrak{B}_1' = p^a = \text{Ord } \mathfrak{A}_1,$$

also

$$\text{Ord } (\mathfrak{B}_1' \times \mathfrak{R}) = \text{Ord } \mathfrak{B}_1' \cdot \text{Ord } \mathfrak{R} = \text{Ord } \mathfrak{A}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{R} = \text{Ord } (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}) = \text{Ord } \mathfrak{H},$$

also

$$\mathfrak{B}_1' \times \mathfrak{R} = \mathfrak{H}.$$

Also ist

$$\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1$$

nach Hilfssatz 6, Korollar, folglich

$$\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{R} = \mathfrak{H}.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2: *Es sei*

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_m \times \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n \times \mathfrak{N},\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{N}$ *die Zusammenfassung sämtlicher nicht kommutativer Faktoren der beiden Zerlegungen in direkte unzerlegbare Faktoren bedeuten, sodaß* $\mathfrak{A}_1$ *bis* $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_1$ *bis* $\mathfrak{B}_n$ *kommutativ sind. Dann ist*

$$\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$$

und $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{N}$ *lassen sich gegeneinander austauschen.*

Beweis: Es sei die Bezeichnung so gewählt, daß $m \geqq n$. Es ist nach Satz 1

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_m \times \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_m \times \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n \times \mathfrak{N}.\end{aligned}$$

Man wende nun den Satz 1 auf die zweite und dritte Zerlegung an und ersetze $\mathfrak{A}_2$ durch einen passend gewählten Faktor der dritten Zerlegung. $\mathfrak{B}_1$ kann nicht an

die Stelle von $\mathfrak{A}_2$ treten, da $\mathfrak{B}_1$ in der zweiten Zerlegung bereits vorkommt und nicht zwei Faktoren eines direkten Produkts einander gleich sein können. Also kann man nacheinander sämtliche $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots, \mathfrak{A}_m$ durch passend gewählte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \ldots, \mathfrak{B}_m$ ersetzen. Das ist aber nur möglich, wenn $n = m$. Man erhält also:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_m \times \mathfrak{M}.$$

Nachdem $m = n$ gezeigt ist, kann man ebenso

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_m \times \mathfrak{N}$$

zeigen. Es ist

$$\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N} \tag{2.}$$

nach Hilfssatz 5, da

$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_m < \mathfrak{z}(\mathfrak{H}).$$

Korollar: *Wenn $\mathfrak{M}$ direkt unzerlegbar, so ist wegen* (2.) *auch $\mathfrak{N}$ direkt unzerlegbar.*

Satz 3: *Es sei $\mathfrak{H}$ auf zweierlei Art in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt. Dann kann jeder nicht kommutative Faktor der einen Zerlegung durch einen passend gewählten der anderen Zerlegung ersetzt* ***werden.***

Beweis: Es mögen wieder die Bezeichnungen (1.) gelten. $\mathfrak{A}_1$ sei nicht kommutativ und die $\mathfrak{B}_\lambda'$ seien wieder die $\mathfrak{B}_\lambda$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1$. Es ist nach Hilfssatz 6

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{B}_1' \times \mathfrak{B}_2' \times \cdots \times \mathfrak{B}_s' = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{H}', \mathfrak{R}) = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}' \tag{3.}$$

wo $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{R}'$ zur Abkürzung eingeführt sind. Es ist

$$\mathfrak{R} \text{ ew. v. m. } \mathfrak{A}_1,$$

also nach Hilfssatz 2, Korollar

$$\mathfrak{R} \text{ ew. v. m. jedem } \mathfrak{B}_\lambda',$$

also mit $\mathfrak{H}'$, also insbesondere mit $\mathfrak{R}'$; also ist wegen $\mathfrak{R}' < \mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R}' < \mathfrak{z}(\mathfrak{R}).$$

Mithin ist nach Hilfssatz 3

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{H}') = \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{R}') = \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_1) \times \mathfrak{R}' < \mathfrak{z}(\mathfrak{A}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{H}). \tag{4.}$$

Also sind die zentralen Isomorphen in $\mathfrak{H}'$ auch solche in $\mathfrak{H}$. Man zerlege in (3.) beide Zerlegungen von $\mathfrak{H}'$ weiter in direkte unzerlegbare Faktoren:

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{B}_{11}'' \times \cdots \times \mathfrak{B}_{st}'' = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{R}_1'' \times \cdots \times \mathfrak{R}_u''.$$

Nach Satz 2 Korollar steht links ein Faktor, z. B. $\mathfrak{B}_{11}''$, sodaß

$$\mathfrak{B}_{11}'' \simeq \mathfrak{A}_1$$

in $\mathfrak{H}'$, also nach (4.) auch in $\mathfrak{H}$, und es ist

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{B}_{11}'' \times \mathfrak{R}'. \tag{5.}$$

Es ist wegen $\mathfrak{R}' < \mathfrak{R}$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{R} = \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{R}' \cdot \mathfrak{R} = \mathfrak{H}'\,\mathfrak{R} = \mathfrak{B}_{11}'' \cdot \mathfrak{R}' \cdot \mathfrak{R} = \mathfrak{B}_{11}'' \cdot \mathfrak{R}.$$

Wegen $\mathfrak{B}_{11}'' < \mathfrak{B}_1'$ ist

$$\mathfrak{R} \text{ ew. v. m. } \mathfrak{B}_{11}''.$$

Ferner ist

$$(\mathfrak{B}_{11}'', \mathfrak{R}) < (\mathfrak{H}', \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}',$$

also mit Rücksicht auf (5.)

$$(\mathfrak{B}_{11}'', \mathfrak{R}) = (\mathfrak{B}_{11}'', \mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = (\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{R}') = \mathfrak{E}.$$

Also ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_{11}'' \times \mathfrak{R},$$

also nach Hilfssatz 6, Korollar

$$\mathfrak{B}_{11}'' = \mathfrak{B}_1,$$

mithin

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{R}.$$

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Es lassen sich also sämtliche nicht kommutativen Faktoren einer Zerlegung durch die sämtlichen nicht kommutativen Faktoren der anderen Zerlegung ersetzen. Die Überlegungen sind dieselben wie beim Beweise des Satzes 2. Es ist also schließlich $r = s$ und bei passender Wahl der Bezeichnung

$$\mathfrak{A}_\lambda \simeq \mathfrak{B}_\lambda \qquad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, r,$$

was zu beweisen war.

Ersetzt man alle Faktoren einer Zerlegung bis auf einen der Reihe nach durch passend gewählte einer anderen Zerlegung, so erhält man auch den Satz, daß jeder Faktor einen passend gewählten einer anderen Zerlegung (nämlich den beim Beweisverfahren übrigbleibenden) **ersetzen** kann.

Folgerung: *Eine Gruppe, die keine invarianten Elemente außer dem Einheitselement enthält, ist auf eine und nur eine Art in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegbar.*

Diesen Satz kann man auch direkt beweisen. Man führe die Bezeichnungen ein, wie in (1.) des Beweises (B); $\mathfrak{A}_1$ ist nicht kommutativ, da sonst

$$\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{z}(\mathfrak{H})$$

wäre, was

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{E}$$

widerspricht. Man lasse Satz 1 und 2 fort und beginne gleich mit dem Beweise des Satzes 3 bis zu der Stelle, wo man erhält

$$\mathfrak{R}' < \mathfrak{z}(\mathfrak{R}) < \mathfrak{z}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{E},$$

also

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{A}_1.$$

Da $\mathfrak{A}_1$ unzerlegbar, muß eine der Komponenten z. B.

$$\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{A}_1,$$

die übrigen

$$\mathfrak{B}_2' = \mathfrak{E},\ \mathfrak{B}_3' = \mathfrak{E}, \ldots, \mathfrak{B}_s' = \mathfrak{E}$$

sein. Es wäre also

$$\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{B}_1.$$

Hieraus folgt nach Hilfssatz 6, Korollar

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1.$$

Jeder Faktor einer Zerlegung kommt also in jeder anderen Zerlegung vor. Da die Faktoren einer Zerlegung alle verschieden sind, kann es nur eine einzige Zerlegung geben.

Wissenschaftliche Zeitschriften

besonders aus den Gebieten

Mathematik und Naturwissenschaften

in kompletten Exemplaren und größeren

Reihen (ev. auch Einzelbände)

kauft

jederzeit und zahlt höchste Preise

L. Franz & Co.

Buchhandlung und Antiquariat für Zeitschriftenliteratur

Leipzig-Lindenau

Henriettenstraße 10 Postschließfach 40

Göschens Lehrbücherei

Mit diesem neuen Unternehmen bezwecken wir eine Sammlung von ausgesprochenen Lehrbüchern aus den Gebieten der Mathematik, der exakten Naturwissenschaften und der Technik, die wissenschaftliche Gründlichkeit, leichte Verständlichkeit und klaren Aufbau in sich vereinigen soll. Diese Lehrbücher sind vor allem bestimmt für Studierende der Universitäten und Technischen Hochschulen, für Lehramtskandidaten und Lehrer mittlerer und höherer Schulen, zur Benutzung an Lehrerseminaren, sowie für das Selbststudium gleichartig vorgebildeter Leser. Jeder Band soll ungefähr den Inhalt einer einsemestrigen Vorlesung umfassen.

Zunächst ist erschienen:

GRUPPE I: REINE MATHEMATIK.

Bachmann, Professor Dr. **Paul,** Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Mit 10 Figuren. Zweite, verb. Auflage. Oktav. XV, 246 Seiten. (Bd.3.) GZ geh. 8,5, geb. 10.

Fueter, Dr. **Rudolf,** Prof. an der Universität Zürich, Synthetische Zahlentheorie. Neue Ausgabe. Oktav. VIII, 271 S. (Bd. 4) GZ geh. 8,8, geb. 10,3.

Perron, Dr. **O.,** Professor an der Universität Heidelberg, Irrationalzahlen. Oktav. VIII, 186 Seiten. (Bd. 1.) GZ geh. 6, geb. 7,5.

Runge, Dr. **C.,** Professor an der Universität Göttingen, Praxis der Gleichungen. Mit 8 Figuren. Zweite, verb. Auflage. Oktav. V, 172 Seiten. (Bd. 2.) GZ geh. 6, geb. 7,5.

Nichteuklidische Geometrie. Von **Heinrich Liebmann,** ord. Professor an der Universität Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. 150 Seiten. 1923. GZ geh. 6, geb. 7.

Mathematical Research in the last 20 years. Presidential Address delivered on the 31st January 1921, before the Benares Mathematical Society. By **Ganesh Prasad.** Groß-Oktav. 36 Seiten. 1923. GZ geh. 0,8.

Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzenden **Ganesh Prasad.** Aus dem Englischen übersetzt von Dr. **Friedrich Lange.** Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923. GZ geh. 0,8.

Der Verkaufspreis wird errechnet durch Multiplikation der Grundzahl (GZ) mit der jeweiligen Schlüsselzahl, die in jeder Buchhandlung zu erfragen ist.

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp. - Berlin W. 10, Genthinerstr. 38

Grad. R. R. 3

APR 23 1924

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 153.

Heft 3/4.

Ausgegeben den 6. März.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1924

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 153. Heft 3/4.

Inhaltsverzeichnis.

Tietze, Heinrich, Über die *Gauß-Green-Stokes*schen Integralsätze . . . . . Seite 141

Hasse, Helmut, Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper . . . . . — 158

Arwin, A., Eine ganzzahlige Transformation einer ternären quadratischen Form — 163

Ludwig, von, Bernhard, Zur Theorie des *Malfatti*schen Problems . . . . . — 175

Hasse, Helmut, Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern . . . . . — 186

Hasse, Helmut, Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nicht-primäre Zahlen — 194

Stengel, C., Über quadratische Nichtreste von der Form $8h+1$ . . . . . — 208

Schmeidler, Werner, Zur affinrationalen Geometrie . . . . . — 215

Hoheisel, G., Untersuchungen über die asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen . . . . . — 228

Hoheisel, G., Der Wertevorrat von Lösungen linearer Differentialgleichungen — 245

Roeser, E., Von der Umkehrbarkeit des Parallelismus in der nichteuklidischen Ebene . . . . . — 249

Brouwer, L. E. J., Berichtigung . . . . . — 253

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Über die *Gauß-Green-Stokes*schen Integralsätze.

Von Herrn *Heinrich Tietze* in Erlangen.

Einleitung.

1. Es handelt sich um die bekannten auf *zwei*dimensionale Bereiche bezüglichen Formeln (vgl. unten (1.) und (47.)) und zwar um eine Ausdehnung auf Fälle, wo die im Integral über die Randlinie auftretenden Funktionen X, Y, bezw. $X_1, X_2, \ldots X_n$ nicht nur von der Stelle abhängen, sondern auch vom Weg, also von dem bereits durchlaufenen Teil der Randlinie. Es werden zwei Fälle behandelt (vgl. Nr. 3, 4), von denen der zweite den ersten umfaßt. Die bezüglichen Sätze spielen eine Rolle bei der Herleitung des *Riemann-Christoffel*schen Tensors aus der Parallelverschiebung der Vektoren auf kleinen geschlossenen Wegen, worauf an anderer Stelle eingegangen werden soll [1]).

Des näheren handelt es sich um folgendes.

2. Sind X, Y stetig differenzierbare Funktionen von x, y, ist ferner S ein beschränkter ebener Bereich, L seine Begrenzung bestehend aus endlich vielen (eine oder mehrere geschlossene Kurven bildenden) Stücken, deren jedes in der Gestalt $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ mit stetig differenzierbaren der Bedingung $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ genügenden $x(t), y(t)$ darstellbar ist [2]), sind dS und dL die ent-

---

[1]) „Über die Parallelverschiebung in *Riemann*schen Räumen“ (Math. Zeitschr. 16).

[2]) An den Intervallendpunkten $t = t_1$ bzw. t_2 sind dabei $x'(t)$, $y'(t)$ als vordere, bezw. hintere Differentialquotienten zu definieren. Die gemachten Voraussetzungen über L könnte man auch so formulieren: L ist zusammensetzbar aus einer endlichen Anzahl einfacher Kurvenbogen mit stetig sich drehender Tangente. — Sei bemerkt, daß im folgenden (1) angewendet wird speziell nur bei Kurven, für die die Existenz von $x'(t)$, $y'(t)$ (und damit einer durch (10 a) darstellbaren Bogenlänge) ausdrücklich vorausgesetzt wird. Es ist daher hier nicht nötig, jene grundsätzlich viel allgemeineren Integrationswege einzuführen, unter denen (1), — unter Weglassung des Zwischengliedes mit der Normale, — gültig bleibt. (Vgl. hierüber, so wie über Kurvenintegrale überhaupt: *A. Pringsheim*, Bayer. Sitz.-Ber. 25 (1894), 29 (1899), 33 (1903) und *L. Heffter*, Göttinger Nachr. 1902, 1903.) Wollte man — was außerhalb der Richtung dieses Aufsatzes liegt — in dieser Hinsicht die Betrachtungen verallgemeinern und etwa gleichwohl an der Parameterdarstellung der Kurve festhalten, so wäre $\int (X\,dy(t) - Y\,dx(t))$ im Sinne *Stieltjes*scher Integrale zu nehmen und für die später auftretenden *Differentialgleichungen* (wie (3)) eine *Verallgemeinerung nach Art der Stieltjesschen Integraldefinition* durchzuführen. Allerdings wird in den späteren Sätzen ausdrücklich eine Voraussetzung über die Länge der auftretenden Kurven gemacht (vgl. (20)); aber es ist nicht ausgemacht, inwieweit von ihr die Gültigkeit der Sätze wirklich abhängt. — Da übrigens die oben angegebenen Voraussetzungen

sprechenden Elemente und n die ins Äußere von S gerichtete Normale, so gilt unter diesen (hinreichenden) Bedingungen der für zwei Dimensionen spezialisierte nach *Gauß* und *Green* benannte Integralsatz:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} \overset{(S)}{\int}\Big(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\Big)\,dS &= \overset{(L)}{\int}[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]\,dL = \\ &= \pm\overset{(L)}{\int}(X\,dy - Y\,dx), \end{aligned}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die im Durchlaufungssinn der Kurve genommene Tangente zur Richtung von n so liegt, wie die positive y- zur positiven x-Richtung oder umgekehrt.

3. Sei im folgenden speziell vorausgesetzt, daß L aus einer einzigen einfachen geschlossenen Kurve besteht. Man kann dann (1.) verallgemeinern auf Fälle, in denen X und Y *nicht als Funktionen des Ortes* (x, y) gegeben sind, sondern bei Durchlaufen von Kurven in einer vom Wege abhängigen Weise bestimmt werden, wobei zwei solche Bestimmungsweisen, eine speziellere (§ 1) und eine allgemeinere (§ 2) betrachtet werden sollen. Die erste speziellere Bestimmungsweise geschieht mittelst zweier Zahlen A, B und 8 Funktionen $c^i_{k\sigma} = c^i_{k\sigma}(x, y)$ $(i, k, \sigma = 1, 2;$ die genaue Angabe aller im einzelnen zu machenden Voraussetzungen sei auf später verschoben). Ist dann eine Kurve C durch

$$x = x(t),\ y = y(t),\quad (t_0 \leqq t \leqq t_1)$$

gegeben, so werde für beliebige von x, y abhängende Ausdrücke F zur Abkürzung

$$(2.)\qquad \begin{aligned} F(x(t), y(t)) &= [F(x,y)]_{(t)} = [F]_{(t)} \\ F(x(t_0), y(t_0)) &= [F(x,y)]_{(t_0)} = [F(x,y)]_0 = [F]_0 \end{aligned}$$

gesetzt. Dann sollen zwei Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ bestimmt werden durch das Differentialgleichungssystem

$$(3.)\qquad \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= ([c^1_{11}]_{(t)}\,X + [c^1_{21}]_{(t)}\,Y)\,x'(t) + ([c^1_{12}]_{(t)}\,X + [c^1_{22}]_{(t)}\,Y)\,y'(t) \\ \frac{dY}{dt} &= ([c^2_{11}]_{(t)}\,X + [c^2_{21}]_{(t)}\,Y)\,x'(t) + ([c^2_{12}]_{(t)}\,X + [c^2_{22}]_{(t)}\,Y)\,y'(t) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $X(t_0) = A$, $Y(t_0) = B$. Hierdurch werden allen Punkten der Kurve C — ersichtlich unabhängig von ihrer Parameterdarstellung — Werte X und Y zugeordnet.

Man kann von der beschriebenen Bestimmung der Funktionen X, Y sagen, sie erfolge gemäß den partiellen Differentialgleichungen

---

für (1) keine Spezialisierung der in anderer Hinsicht viel allgemeineren von *Pringsheim*, l. c. Jg. 29, § 3 gegebenen sind (und auch nicht der sonst gewöhnlich angegebenen), so sei über den Beweis des Satzes in obiger Fassung bemerkt: Flächen- und Kurvenintegral sind beide invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems, wenn X, Y als Vektorkomponenten kogredient zu x, y transformiert werden. Ferner folgt aus den Voraussetzungen die Zerlegbarkeit von L in eine endliche Anzahl von Bögen, so daß alle Tangentenrichtungen eines Bogens einem Winkelintervall $< \pi/4$ angehören, und daher jeder Bogen entweder im ursprünglichen Koordinatensystem x, y oder in dem um 45° gedrehten x_1, y_1 sich auf beide Koordinatenachsen *einfach* projiziert (durch eine monotone Funktion darstellbar ist). Legt man durch die Endpunkte dieser Bögen die Parallelen zur x-, y-, x_1- und y_1-Achse, so enthält die Figur alle Hilfslinien zur Zerlegung von S in Bereiche einfacher Art, für die (1) als gültig bekannt ist.

$$(4.)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) &= c^1_{11}\,X + c^1_{21}\,Y,\ \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right) = c^1_{12}\,X + c^1_{22}\,Y,\\ \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right) &= c^2_{11}\,X + c^2_{21}\,Y,\ \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) = c^2_{12}\,X + c^2_{22}\,Y, \end{aligned}$$

in denen aber $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right), \ldots$ einen symbolischen Charakter haben[1]), weil die Funktionen c^i_{ko} den zur Befriedigung der Gleichungen $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}$ erforderlichen „Integrabilitätsbedingungen" — den sogenannten Bedingungen der „Passivität" des Systems (4.)[2]) —

$$\frac{\partial c^i_{k2}}{\partial x} - \frac{\partial c^i_{k1}}{\partial y} + \sum_h \left(c^i_{h2}\,c^h_{k1} - c^i_{h1}\,c^h_{k2}\right) = 0 \qquad (i, k = 1, 2)$$

nicht zu genügen brauchen[3]). Tun sie es, so fällt man auf den Fall (Nr. 2) zurück, daß X, Y Funktionen des Ortes, also unabhängig vom Weg werden.

Ferner nehme man einen (weiterhin festgehaltenen) Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ und betrachte für jedes System von Null verschiedener Zahlen Δx, Δy solche einfache geschlossene Kurven L, die alle von P_0 ausgehen ($x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$), ganz im Bereich

$$(5.)\qquad |x - x_0| \leqq |\Delta x|,\ |y - y_0| \leqq |\Delta y|$$

verlaufen und deren Länge den Wert $\mu\delta$ nicht übersteigt, wo

$$|\Delta x| + |\Delta y| = \delta$$

gesetzt ist und μ eine gegebene, von Δx, Δy unabhängige positive Zahl ist. ΔS sei der Inhalt des von L begrenzten Gebietes S. Bildet man dann das Integral[4])

$$(6.)\qquad \pm\int_{t_0}^{t_1} \left(X(t)\,y'(t) - Y(t)\,x'(t)\right) dt$$

so unterscheidet es sich — das ist in vorläufiger Fassung der Inhalt von Satz 1 in Nr. 8 — von

$$(7.)\qquad \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]_0 \Delta S$$

---

[1]) Die allgemeine Erklärung dieser — durch Einklammern als solche gekennzeichneten — Symbole ist die: Werden X, Y durch Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F_{11}(x(t), y(t), X, Y)\,x'(t) + F_{12}(x(t), y(t), X, Y)\,y'(t),\\ \frac{dY}{dt} &= F_{21}(x(t), y(t), X, Y)\,x'(t) + F_{22}(x(t), y(t), X, Y)\,y'(t) \end{aligned}$$

bestimmt, so bedeuten $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right), \ldots$ jene Funktionen $F_{11}(x, y, X, Y)$ von x, y, X, Y, aus denen durch Einsetzen von $x = x(t)$, $y = y(t)$ die Koeffizienten von $x'(t)$, $y'(t)$ in den Differentialgleichungen gewonnen werden.

[2]) Vgl. Enzykl. II A 5 (*E. v. Weber*), p. 299.

[3]) Auch wird von den $c^i_{k\sigma}$ Symmetrie in den unteren Indizes k, σ nicht vorausgesetzt, zum Unterschied von den analogen bei „Parallelverschiebung" in einem 2-dimensionalen *Riemann*schen Raum auftretenden $\Gamma^i_{k\sigma} = \left\{\begin{matrix} k\sigma \\ i \end{matrix}\right\}$.

[4]) Das Vorzeichen bestimmt sich wie im Fall des gewöhnlichen Kurvenintegrals in Nr. 2.

nur um eine Größe $O(\delta^3)$ [1]). Dabei ist entsprechend (4.) und (2.)

$$\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]_0 = [c_{11}^1]_0\, A + [c_{21}^1]_0\, B + [c_{12}^2]_0\, A + [c_{22}^2]_0\, B$$

und es bedeutet nach bekannter Bezeichnungsweise von *E. Landau* [2]) allgemein $O(\delta^\nu)$ hier und im folgenden eine *Größe ν-ter Kleinheitsordnung in δ*, d. h. eine Größe, die für hinlänglich kleines δ (d. h. für alle hinlänglich kleinen $\Delta x, \Delta y$) nicht größer ist als δ^ν mal einer positiven *von $\Delta x, \Delta y$ und der gewählten Kurve L unabhängigen* Schranke. (Hingegen ist nicht ausgeschlossen, daß diese Schranke von den übrigen für den Wert des Kurvenintegrals maßgebenden Bestimmungsstücken abhängt, wie von den Funktionen $c_{k\sigma}^i$, von A, B, usw., worüber im folgenden jeweils genaueres angegeben ist; vgl. Nr. 6, 10, 12.)

4. Die Gleichheit von (6.) und (7.) bis auf Größen höherer Ordnung gilt aber auch bei allgemeinerer Bestimmungsweise der Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ längs geschlossener Kurven L, derart, daß diese Funktionen nicht selbst durch symbolische partielle Differentialgleichungen (4.) bestimmt werden, sondern aus irgend einer endlichen Anzahl durch solche symbolische Differentialgleichungen (vgl. unten (38.)) bestimmter Funktionen $Z^1(t), Z^2(t), \ldots Z^m(t)$ sich linear zusammensetzen. Das nähere enthält § 2.

Auf diese Betrachtungen lassen sich die analogen Erweiterungen des *Stokes*schen Integralsatzes (für zweidimensionale Bereiche in Räumen beliebiger Dimension) durch bloße Rechnung zurückführen (§ 3).

§ 1.

5. In Ausführung der einleitenden Skizze gehen wir von folgenden Voraussetzungen aus. Gegeben die positiven Zahlen λ, μ, ein Bereich

$$(8.) \qquad x^* \leqq x \leqq x^{**}, \quad y^* \leqq y \leqq y^{**}$$
$$(x^* < x^{**},\ y^* < y^{**})$$

und die im Bereich (8.) stetigen und mit beschränkten partiellen Ableitungen [3]) versehenen Funktionen $c_{k\sigma}^i = c_{k\sigma}^i(x, y)$, $(i, k, \sigma = 1, 2)$; in (8.) gelte für alle i, k, σ:

$$(9.) \qquad |c_{k\sigma}^i| \leqq K, \quad \left|\frac{\partial c_{k\sigma}^i}{\partial x}\right| \leqq K^*, \quad \left|\frac{\partial c_{k\sigma}^i}{\partial y}\right| \leqq K^*.$$

---

[1]) Über den Gegenstand dieser Arbeit habe ich mich während ihrer Entstehung mehrmals mit Herrn *Otto Haupt* unterhalten; diese Gespräche haben sich auch auf die geeignetste Form für eine präzise Fassung des Inhalts bezogen und sind mir damit für die ganze Darstellung förderlich gewesen.

[2]) Vgl. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I (1909), p. 31; Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (1916) p. 5. An letzterer Stelle wird das Symbol $O(g(\delta))$ nicht nur für Annäherung der Variablen δ gegen $+\infty$, sondern auch für Annäherung an einen endlichen Wert eingeführt. (Im Text liegt der Fall rechtsseitiger Annäherung an $\delta = 0$ vor.)

[3]) Genauer gesagt wird die Existenz von $\frac{\partial c_{k\sigma}^i}{\partial x}$ bzw. von $\frac{\partial c_{k\sigma}^i}{\partial y}$ nur für alle Punkte $x^* < x < x^{**}$ bezw. nur für alle Punkte $y^* < y < y^{**}$ aus (8) vorausgesetzt.

Wir betrachten ganz in (8.) verlaufende Kurven C:

(10.) $$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (t_0 \leqq t \leqq t_1)$$

für welche $x(t), y(t)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar[1]) sind $(x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0)$, deren Bogenlänge somit

(10a.) $$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

ist. Außerdem werde von jeder zu betrachtenden Kurve C vorausgesetzt, daß

(11.) $$s(t) \leqq \frac{\lambda}{1 + 2\lambda} \cdot \frac{1}{2K}$$

für $t = t_1$ und daher — wegen $0 \leqq s(t) \leqq s(t_1)$ — für alle t-Werte erfüllt sei.

Sind A, B zwei Zahlen, so werde gesetzt:

(12.) $$b = \lambda (|A| + |B|)$$
$$M = 2K (1 + 2\lambda) (|A| + |B|).$$

Stellt man nun unter Benutzung der abkürzenden Bezeichnungen (2.) das Differentialgleichungssystem (3.) auf und schreibt die Anfangswerte $X(t_0) = A$, $Y(t_0) = B$ vor, so sind nach bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätzen hierdurch $X(t)$, $Y(t)$ vollständig bestimmt und damit allen Punkten von C — wie schon bemerkt unabhängig von der Parameterdarstellung — Werte von X und Y zugeordnet. Nimmt man nämlich für t speziell die Bogenlänge s $(0 \leqq s \leqq s_1 = s(t_1))$, so sind in dem durch

(13.) $$|s| \leqq s_1$$

und durch die Ungleichungen

(14.) $$|X - A| \leqq b, \quad |Y - B| \leqq b$$

bestimmten t-X-Y Bereich wegen

(15.) $$|x'(t)| \leqq \left|\frac{ds}{dt}\right|, \quad |y'(t)| \leqq \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

(16.) $$|X| \leqq |A| + b, \quad |Y| \leqq |B| + b$$

und wegen (9.) und $\frac{ds}{dt} = 1$ die rechten Seiten von (3.) absolut höchstens gleich $2K(|A| + b) + 2K(|B| + b) = M$. Wegen $s_1 \leqq b/M$ existiert daher, da die *Lipschitz*-Bedingung ersichtlich erfüllt ist, eine im Bereich (13.), (14.) gelegene eindeutig bestimmte Lösung[2]).

Setzen wir abkürzend

(17.) $$F(x(t), y(t), X(t), Y(t)) = [F(x, y, X, Y)]_{(t)}$$
$$[F(x, y, X, Y)]_{(t_0)} = [F(x, y, X, Y)]_0$$

und bezeichnen den Anfangspunkt $(x(t_0), y(t_0))$ von C mit Q_0, so diene die Gleichung

---

[1]) Das soll heißen: Es gibt eine endliche Anzahl μ von Intervallen

$$\bar{t}_{\nu-1} \leqq t \leqq \bar{t}_\nu \quad (1 \leqq \nu \leqq \mu, \ \bar{t}_0 = t_0, \ \bar{t}_\mu = t_1),$$

in welchen $x(t)$, $y(t)$ Ableitungen $x'(t)$, $y'(t)$ besitzen (in den Intervallendpunkten rechts- bezw. linksseitige), die in jedem Intervall (einschl. der Endpunkte) stetig sind. — Die Bedingung $x'^2 + y'^2 \neq 0$ soll auch in diesen Endpunkten sinngemäß erfüllt sein.

[2]) Vgl. Enzykl. II A 4a (*Painlevé*) p. 193, (5).

$$(18.)\qquad \begin{aligned} &\overset{(C)}{\int_{Q_0}} (F(x, y, X, Y)\, dx + G(x, y, X, Y)\, dy) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} ([F(x, y, X, Y)]_{(t)}\, x'(t) + [G(x, y, X, Y)]_{(t)}\, y'(t))\, dt \end{aligned}$$

zur Definition der von Q_0 längs C genommenen Kurvenintegrale.

6. Wir betrachten weiterhin nur solche (unsere bisherigen Voraussetzungen erfüllenden) Kurven C, für welche es zwei Zahlen Δx, Δy gibt, so daß C ganz im Bereich

$$(19.)\qquad |x - x(t_0)| \leqq |\Delta x|,\ |y - y(t_0)| \leqq |\Delta y|$$

liegt und daß für die Gesamtlänge $s(t_1)$ gilt [1]):

$$(20.)\qquad s(t_1) \leqq \mu\,(|\Delta x| + |\Delta y|) = \mu\delta.$$

Jedes solche Zahlenpaar Δx, Δy soll „zur Kurve gehörig" heißen.

Zur besseren Übersicht des folgenden definieren wir dann: Eine Größe g, die abhängig ist von den Zahlen λ, μ, A, B, dem Bereich (8.), den Funktionen $c^i_{k\sigma}$ in diesem Bereich, ferner von einer Kurve C der betrachteten Art und eventuell von weiteren Variablen (z. B. vom Kurvenparameter t) heiße eine *Größe ν-ter Ordnung*, wenn es eine nur von λ, μ, A, B und von den durch (8.) und die Funktionen $c^i_{k\sigma}$ bestimmten Zahlen K, K^* abhängige Zahl $H = H(\lambda, \mu, K, K^*, A, B)$ gibt, so daß

$$|g| \leqq H(|\Delta x| + |\Delta y|)^\nu = H\delta^\nu$$

für jedes zu C gehörige Zahlenpaar Δx, Δy erfüllt ist (u. zw. für alle Werte der Variablen, von denen etwa g noch abhängt). Eine Größe ν-ter Ordnung werde mit $O(\delta^\nu)$ bezeichnet (vgl. Nr. 3).

Beispielsweise ist wegen (20.) die Länge unserer Kurven C eine Größe erster Ordnung, ferner der Flächeninhalt ΔS eines von einer einfachen geschlossenen Kurve C begrenzten Gebietes S wegen der aus (19.) folgenden Ungleichung

$$(21.)\qquad \Delta S \leqq 4\,|\Delta x.\Delta y| \leqq (|\Delta x| + |\Delta y|)^2 = \delta^2$$

von zweiter Ordnung [2]). Es gilt der Satz:

(a) Sind die auf einer durch (10.) dargestellten Kurve C definierten Funktionen $F(t)$, $G(t)$ von ν-ter Ordnung ($\nu \geqq 0$) dann ist das Integral

$$(22.)\qquad J(t) = \int_{t_0}^{t} (F(t)\, x'(t) + G(t)\, y'(t))\, dt$$

für alle t-Werte ($t_0 \leqq t \leqq t_1$) eine Größe $(\nu + 1)$-ter Ordnung.

Denn aus

$$|F(t)| \leqq H_1\delta^\nu,\ |G(t)| \leqq H_2\delta^\nu$$

folgt unter Benutzung von (15.), $s(t) \leqq s(t_1)$ und (20.):

$$(23.)\qquad |J(t)| \leqq (H_1 + H_2)\,\delta^\nu\, s(t) \leqq \mu(H_1 + H_2)\,\delta^{\nu+1}.$$

---

[1]) Die anschauliche Bedeutung von (20.) ist klar: Es werden Kurven ausgeschlossen, die sich innerhalb eines kleinen Bereiches bandwurmartig zu beliebiger Länge entwickeln.

[2]) Im besonderen ist jede Form ν-ten Grades $\sum_{i=0}^{\nu} a_i\ (\Delta x)^{\nu-i}\ (\Delta y)^i$ mit konstanten oder absolut unter einer (nur von λ, μ, K, K^*, A, B abhängigen) Schranke liegenden a_i von ν-ter Ordnung, wie aus der Existenz eines $H \geqq \dfrac{|a_i|}{\binom{\nu}{i}}$ (für $0 \leqq i \leqq \nu$) ersichtlich ist. Konstante oder im genannten Sinn beschränkte Größen sind von der Ordnung Null.

7. Wir wählen einen Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ in (8.) und nehmen für C solche einfache geschlossene Kurven L, die von P_0 ausgehen ($x(t_0) = x(t_1) = x_0$, $y(t_0) = y(t_1) = y_0$). Mit $X(t)$, $Y(t)$ bezeichnen wir die zugehörigen, gemäß Nr. 5 durch (3.) und die Anfangswerte A, B bestimmten Funktionen. Um nun für die Kurven L die in der Einleitung (Nr. 3) aufgestellte Behauptung über das Integral (6.) zu beweisen, gehen wir von den Ungleichungen (14.) bezw. (16.) aus, denen die Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ für alle t-Werte ($t_0 \leqq t \leqq t_1$) genügen. Daraus und aus (9.) folgt, daß $[c^1_{11}]_{(t)}\, X(t) + [c^1_{21}]_{(t)}\, Y(t)$ und ebenso die übrigen Koeffizienten von $x'(t)$ und $y'(t)$ auf den rechten Seiten von (3.) beschränkt [1]), also Größen der Ordnung Null sind (vgl. Anm. 2, S. 146). Drückt man nun in

$$X(t) - A = \int_{t_0}^{t} \frac{dX}{dt}\, dt, \quad Y(t) - B = \int_{t_0}^{t} \frac{dY}{dt}\, dt$$

$\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}$ durch (3.) aus, so erhält man Integrale von der Gestalt (22.), in welchen die Größen $F(t), G(t)$ von der Ordnung Null sind. Nach Satz (a) ist also [2])

(26.) $$X(t) - A = O(\delta), \quad Y(t) - B = O(\delta).$$

8. Wir führen nun die *Ortsfunktionen* ein:

(27.)
$$\bar{X}(x, y) = A + ([c^1_{11}]_0\, A + [c^1_{21}]_0\, B)\,(x - x_0) + ([c^1_{12}]_0\, A + [c^1_{22}]_0\, B)\,(y - y_0),$$
$$\bar{Y}(x, y) = B + ([c^2_{11}]_0\, A + [c^2_{21}]_0\, B)\,(x - x_0) + ([c^2_{12}]_0\, A + [c^2_{22}]_0\, B)\,(y - y_0)$$

oder symbolisch abgekürzt geschrieben (vgl. Nr. 3):

$$\bar{X} = A + \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\right]_0 (x - x_0) + \left[\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)\right]_0 (y - y_0),$$
$$\bar{Y} = B + \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right]_0 (x - x_0) + \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]_0 (y - y_0).$$

Wir vergleichen $\bar{X}$, $\bar{Y}$ für alle Punkte von L mit den Werten $X(t)$, $Y(t)$. Man erhält aus (3.) und (27.):

$$X(t) - [\bar{X}]_{(t)} = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{dX}{dt} - \frac{d[\bar{X}]_{(t)}}{dt}\right) dt =$$

(28.)
$$= \int_{t_0}^{t} \Big[\Big(\Big\{[c^1_{11}]_{(t)}\, X(t) - [c^1_{11}]_0\, A\Big\} + \Big\{[c^1_{21}]_{(t)}\, Y(t) - [c^1_{21}]_0\, B\Big\}\Big)\, x'(t)$$
$$+ \Big(\Big\{[c^1_{12}]_{(t)}\, X(t) - [c^1_{12}]_0\, A\Big\} + \Big\{[c^1_{22}]_{(t)} Y(t) - [c^1_{22}]_0\, B\Big\}\Big)\, y'(t)\Big]\, dt.$$

Nun ist wegen (9.) im Bereich (19.) [3]):

$$c^i_{k\sigma}(x, y) - c^i_{k\sigma}(x_0, y_0) = O(\delta)$$

und weil L ganz in (19.) liegt, ist also speziell: $[c^i_{k\sigma}]_{(t)} - [c^i_{k\sigma}]_0 = O(\delta)$; daher

---

[1]) U. zw. ist

(24.) $$\left|[c^i_{1\sigma}]_{(t)}\, X(t) + [c^i_{2\sigma}]_{(t)}\, Y(t)\right| \leqq K(|A| + |B| + 2b) = \tfrac{1}{2} M.$$

[2]) U. zw. folgt aus (24.) gemäß (23.):

(25.) $$|X(t) - A|,\ |Y(t) - B| \leqq M s(t) \leqq M \mu \delta.$$

[3]) U. zw. ist

(29.) $$\left|c^i_{k\sigma}(x, y) - c^i_{k\sigma}(x_0, y_0)\right| \leqq K^*(|x - x_0| + |y - y_0|) \leqq K^* \delta.$$

und wegen (26.) und (9.) ist auch jeder der Ausdrücke in geschlungenen Klammern { } in (28.), wie

$$[c^1_{11}]_{(t)}\, X(t) - [c^1_{11}]_0\, A = [c^1_{11}]_{(t)}\, (X(t) - A) + ([c^1_{11}]_{(t)} - [c^1_{11}]_0)\, A$$

eine Größe [1]) $O(\delta)$, desgleichen in (28.) unter dem Integralzeichen die Koeffizienten von $x'(t)$ und $y'(t)$ [2]). Nach Satz (a) ist also $X(t) - [\overline{X}]_{(t)}$ und analog $Y(t) - [\overline{Y}]_{(t)}$ eine Größe zweiter [3]) und jedes der Integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(X(t) - \Big[\overline{X}\Big]_{(t)} \Big) y'(t)\, dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} \Big(Y(t) - \Big[\overline{Y}\Big]_{(t)} \Big) x'(t)\, dt$$

eine Größe dritter Ordnung [4]), somit

$$\overset{(L)}{\int_{P_0}} (X\, dy - Y\, dx) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\Big[\overline{X}\Big]_{(t)} y'(t) - \Big[\overline{Y}\Big]_{(t)} x'(t) \Big)\, dt + O(\delta^3).$$

Zur Berechnung des Integrals rechts können wir uns nun, da $\overline{X}$, $\overline{Y}$ Ortsfunktionen sind, auf den gewöhnlichen Fall des *Gauß-Green*schen Satzes berufen (Formel (1.)) und erhalten:

$$\pm \overset{(L)}{\int} (\overline{X}\, dy - \overline{Y}\, dx) = \overset{(S)}{\int} \Big(\frac{\partial \overline{X}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} \Big)\, dS = \Big[\Big(\frac{\partial X}{\partial x} \Big) + \Big(\frac{\partial Y}{\partial y} \Big) \Big]_0 \Delta S$$

und daher

$$(32.) \qquad \pm \overset{(L)}{\int_{P_0}} (X\, dy - Y\, dx) = \Big[\Big(\frac{\partial X}{\partial x} \Big) + \Big(\frac{\partial Y}{\partial y} \Big) \Big]_0 \Delta S + O(\delta^3)$$

womit die in Nr. 3 aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Somit gilt der

Satz 1. *Es seien die Zahlen λ, μ (beide > 0), K, K^* (beide $\geqq 0$), ein Bereich* (8.) *und die in* (8.) *stetigen und differenzierbaren, den Ungleichungen* (9.) *genügenden Funktionen $c^i_{k\sigma}(x, y)$ gegeben ($i, k, \sigma = 1, 2$). Sei dann $P_0 = (x_0, y_0)$ ein Punkt des Bereichs* (8.) *und* (10.) *eine ganz in* (8.) *verlaufende einfache geschlossene von P_0 ausgehende Kurve L:*

$$x(t_0) = x(t_1) = x_0, \quad y(t_0) = y(t_1) = y_0,$$

für welche $x(t)$, $y(t)$ stetig und „stückweise stetig differenzierbar" sind ($x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$, vgl. Anm. 1, S. 145*) und deren Bogenlänge $s(t)$ der Ungleichung* (11.) *genügt. Außerdem genüge L der Bedingung, daß es zwei Zahlen Δx, Δy gibt, so daß L ganz im Bereich* (19.) *liegt und die Gesamtlänge $s(t_1)$ von L nicht größer als $\mu(|\Delta x| + |\Delta y|)$ ist. Ist dann ΔS der Flächeninhalt des von L begrenzten Gebietes S, sind ferner die Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ durch die Differentialgleichungen* (3.) *und die Anfangswerte $X(t_0) = A$, $Y(t_0) = B$ bestimmt, ist endlich „$\pm$" das wie in Nr. 2 festzulegende Vorzeichen und wird abkürzend $c^i_{k\sigma}(x_0, y_0) = [c^i_{k\sigma}]_0$ gesetzt, so gilt die Ungleichung:*

---

[1]) U. zw. ist wegen (25.), (29.):

(30.) $$\Big| [c^1_{11}]_{(t)}\, X(t) - [c^1_{11}]_0\, A \Big| \leqq (KM\mu + K^*|A|)\, .\, \delta.$$

[2]) Wegen (30.) und den drei analogen Ungleichungen ist jeder dieser Koeffizienten absolut $\leqq [2KM\mu + K^*(|A| + |B|)]\, .\, \delta$.

[3]) Wegen Anm. 2), S. 148 und gemäß (23.) ist

(31.) $$|X(t) - [\overline{X}]_{(t)}|,\ |Y(t) - [\overline{Y}]_{(t)}| \leqq 2\mu\, [2KM\mu + K^*(|A| + |B|)]\, .\, \delta^2.$$

[4]) Wegen (31.) ist gemäß (23.) jedes dieser Integrale absolut

$$\leqq 2\mu^2\, [2KM\mu + K^*(|A| + |B|)]\, .\, \delta^3 = 2\mu^2\, [4(1 + 2\lambda)\mu K^2 + K^*]\, (|A| + |B|)\, .\, \delta^3.$$

$$\left| \pm \int_{t_0}^{t_1} \Big(X(t)\, y'(t) - Y(t)\, x'(t) \Big)\, dt \right.$$
$$\left. - \left([c^1_{11}]_0\, A + [c^1_{21}]_0\, B + [c^2_{12}]_0\, A + [c^2_{22}]_0\, B \right) \Delta S \right|$$
$$\leqq G\, (|\Delta x| + |\Delta y|)^3,$$

wo G eine Schranke bedeutet, die nur von λ, μ, A, B, K, K^* (also außer von den vorgeschriebenen Zahlen λ, μ und den Anfangswerten nur von dem Bereich (8.) und den Funktionen $c^i_{k\sigma}$) abhängt, hingegen von Δx, Δy, von der speziellen Kurve L und auch von P_0 unabhängig ist.

Zusatz 1: Für diese Schranke kann

(32 a.) $$G = 4\mu^2\, (4\mu\, (1 + 2\lambda)\, K^2 + K^*)\, (|A| + |B|)$$

genommen werden.

Dieser Zusatz folgt aus den in den Anm. 1, S. 147 bis 4, S. 148 vorgenommenen Abschätzungen.

Zusatz 2. Daß die zwecks Sicherung der Lösungen von (3.) eingeführte Ungleichung (11.) besonders unter den Voraussetzungen aufgeführt wird, läßt sich durch Beschränkung auf hinreichend kleine Bereiche (8.) vermeiden. Bezeichnen nämlich $h(\lambda)$ und $G(\lambda)$ die rechten Seiten von (11.) bezw. (32 a.) in ihrer Abhängigkeit von λ und ist λ_0 (>0) fest gewählt, etwa $= 2$. Werden dann $|x^{**} - x^*|$ und $|y^{**} - y^*| \leqq h(\lambda_0)/2\mu$ angenommen, sodaß für alle Kurven in (8.) auch $|\Delta x|, |\Delta y| \leqq h(\lambda_0)/2\mu$ angenommen werden können, so ist $s(t_1) \leqq \mu\, (|\Delta x| + |\Delta y|) \leqq h(\lambda_0)$, also (11.) von selbst erfüllt und Satz 1 gilt für $G = G(\lambda_0)$. In der Formulierung von Satz 1 kann dann von der Größe λ und von der Abhängigkeit der Schranke G von λ vollständig abgesehen werden.

§ 2.

9. Ein etwas allgemeinerer Fall, als der in Nr. 5 betrachtete ist der folgende. Seien $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $K, K^*, K_1, K_1^*, K_1^{**}, A^1, A^2, \ldots A^m$ gegebene Zahlen und $c^j_{\varrho\sigma}$ $(j, \varrho = 1, \ldots m;\ \sigma = 1, 2)$ im Bereich (8.) stetige Funktionen mit beschränkten Ableitungen, die (9.) erfüllen, ferner $a_{\varrho\sigma}(x, y)$ im Bereich (8.) gegebene stetige und stetig differenzierbare Funktionen $(\varrho = 1, \ldots m;\ \sigma = 1, 2)$, die in (8.) den Ungleichungen

(33.) $$|a_{\varrho\sigma}(x, y)| \leqq K_1$$

und deren Ableitungen [1]) in (8.) den Ungleichungen

(34.) $$\left| \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial y} \right| \leqq K_1^*,$$

(35.) $$\left| \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x} \right)_{x_1, y_1} - \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x} \right)_{x_2, y_2} \right|, \left| \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial y} \right)_{x_1, y_1} - \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial y} \right)_{x_2, y_2} \right|$$
$$\leqq K_1^{**} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

genügen, wobei (x_1, y_1), (x_2, y_2) irgend zwei Punkte in (8.) sind, für die die betreffende Ableitung zu bilden ist.

---

[1]) Die Existenz dieser Ableitungen wird auch für die Randpunkte von (8.), — gegebenenfalls im Sinn vorderer oder hinterer Ableitungen, — vorausgesetzt.

Dann sollen längs einer denselben Voraussetzungen [1]) wie in § 1 genügenden Kurve C die Funktionen $Z^1(t), \ldots, Z^m(t)$ definiert sein als diejenigen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$(37.) \qquad \frac{dZ^j}{dt} = \sum_\varrho Z^\varrho([c^j_{\varrho 1}]_{(t)}\, x'(t) + [c^j_{\varrho 2}]_{(t)}\, y'(t)),$$

die für $t = t_0$ die Werte $Z^j = A^j$ annehmen, — eine Bestimmungsweise, die man wieder symbolisch [2]) durch die Gleichungen

$$(38.) \qquad \left(\frac{\partial Z^j}{\partial x}\right) = \sum_\varrho c^j_{\varrho 1} Z^\varrho, \quad \left(\frac{\partial Z^j}{\partial y}\right) = \sum_\varrho c^j_{\varrho 2} Z^\varrho$$

beschreiben kann. Wird analog zu (12.)

$$(39.) \qquad b = \lambda \sum_\varrho |A^\varrho|, \quad M = 2K(1 + m\lambda) \sum_\varrho |A^\varrho|$$

gesetzt, so stellt man wie in Nr. 5 fest, daß in dem durch (13.) und

$$|Z^j - A^j| \leqq b$$

bestimmten Bereich die gewünschte Lösung $Z^1(t), \ldots Z^m(t)$ von (37.) existiert und eindeutig bestimmt ist. Haben dann $P_0, L, S, \Delta S, \Delta x, \Delta y$ die gleiche Bedeutung wie in § 1, so werde gesetzt:

$$X = \sum_\varrho a_{\varrho 1} Z^\varrho, \quad Y = \sum_\varrho a_{\varrho 2} Z^\varrho$$

und entsprechend symbolisch, im Sinn von Anm. 1, S. 143 und mit Benutzung der Symbole (38.):

$$(40.) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) &= \sum_\varrho \left[a_{\varrho 1}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial x}\right) + \frac{\partial a_{\varrho 1}}{\partial x} Z^\varrho\right], \quad \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right) = \sum_\varrho \left[a_{\varrho 1}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial y}\right) + \frac{\partial a_{\varrho 1}}{\partial y} Z^\varrho\right], \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right) &= \sum_\varrho \left[a_{\varrho 2}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial x}\right) + \frac{\partial a_{\varrho 2}}{\partial x} Z^\varrho\right], \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) = \sum_\varrho \left[a_{\varrho 2}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial y}\right) + \frac{\partial a_{\varrho 2}}{\partial y} Z^\varrho\right]. \end{aligned}$$

Mit $\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\right]_0, \ldots$ werden die Werte bezeichnet, die diese Funktionen von t für $t = t_0$ annehmen. Es wird dann *behauptet*, daß wie im Fall des § 1 das im Sinn von (18.) erklärte Kurvenintegral

$$(41.) \qquad \int_{P_0}^{(L)} (X\,dy - Y\,dx) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_\varrho Z^\varrho([a_{\varrho 1}]_{(t)}\, y'(t) - [a_{\varrho 2}]_{(t)}\, x'(t))\, dt$$

sich von $\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]_0 \Delta S$ nur um eine Größe dritter Ordnung unterscheidet, daß also wieder (32.) gilt.

10. Der Beweis verläuft dem in § 1 analog. Wir übernehmen dabei aus Nr. 3 und 6 die Definition der Größen ν-ter Kleinheitsordnung bezüglich $\delta = |\Delta x| + |\Delta y,|$ wobei die auftretenden Schranken H jetzt von $\lambda, \mu, K, K^*, K_1, K_1^*, K_1^{**}, A^1, \ldots, A^m$ abhängen können. Man erkennt zunächst, daß auf den rechten Seiten von (37.) die Koeffizienten von $x'(t), y'(t)$, d. h. die Ausdrücke $\sum_\varrho Z^\varrho [c^j_{\varrho\sigma}]_{(t)}$ in ihrem absoluten Betrag beschränkt also Größen der Ordnung Null sind [3]), woraus wegen

---

[1]) Nur hat an Stelle von (11.) die Ungleichung zu treten:

$$(36.) \qquad s(t) \leqq \frac{\lambda}{1 + m\lambda} \cdot \frac{1}{2K}.$$

[2]) Vgl. Nr. 3 und Anm. [1]) S. 143.

[3]) Es ist nicht schwer, wie in § 1 Ungleichungen mit ausgerechneten Schranken aufzustellen, an Stelle der bloßen Feststellungen der Größenordnung, mit denen wir uns hier begnügen.

$$Z^j(t) - A^j = \int_{t_0}^{t} \frac{dZ^j}{dt}\, dt$$

gemäß Satz (a)

$$Z^j(t) - A^j = O(\delta)$$

folgt. Bildet man nun die Ortsfunktionen [1])

$$\bar{Z}^j(x, y) = A^j + \sum_{\varrho} A^\varrho([c^j_{\varrho 1}]_0\,(x - x_0) + [c^j_{\varrho 2}]_0\,(y - y_0))$$

und vergleicht sie auf L mit den Funktionen $Z^j(t)$, so erhält man analog wie in Nr. 8

$$\begin{aligned} Z^j(t) - [\bar{Z}^j]_{(t)} &= \int_{t_0}^{t} \Big(\frac{dZ^j}{dt} - \frac{d\,[\bar{Z}^j]_{(t)}}{dt}\Big)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t} \Big(\sum_{\varrho} \Big\{[c^j_{\varrho 1}]_{(t)}\, Z^\varrho(t) - [c^j_{\varrho 1}]_0\, A^\varrho\Big\}\, x'(t) \\ &\qquad + \sum_{\varrho} \Big\{[c^j_{\varrho 2}]_{(t)}\, Z^\varrho(t) - [c^j_{\varrho 2}]_0\, A^\varrho\Big\}\, y'(t)\Big)\, dt \\ &= O(\delta^2) \end{aligned}$$

und hieraus, wenn

$$\sum_{\varrho} a_{\varrho 1}\, \bar{Z}^\varrho = \bar{X}(x, y), \quad \sum_{\varrho} a_{\varrho 2}\, \bar{Z}^\varrho = \bar{Y}(x, y)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} &\overset{(L)}{\int_{P_0}} (X\, dy - Y\, dx) - \int_{t_0}^{t_1} \Big([\bar{X}]_{(t)}\, y'(t) - [\bar{Y}]_{(t)}\, x'(t)\Big)\, dt \\ (43.)\quad &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\varrho} \Big(Z^\varrho(t) - [\bar{Z}^\varrho]_{(t)}\Big)\Big([a_{\varrho 1}]_{(t)}\, y'(t) - [a_{\varrho 2}]_{(t)}\, x'(t)\Big)\, dt \\ &= O(\delta^3). \end{aligned}$$

Nun ist gemäß (1.) — wir haben es hierbei mit Ortsfunktionen zu tun! —

$$\begin{aligned} (44.)\quad \pm \int_{t_0}^{t_1} \Big([\bar{X}]_{(t)}\, y'(t) - [\bar{Y}]_{(t)}\, x'(t)\Big)\, dt &= \pm \overset{(L)}{\int_{P_0}} \Big(\bar{X}(x, y)\, dy - \bar{Y}(x, y)\, dx\Big) \\ &= \overset{(S)}{\int} \Big(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y}\Big)\, dS. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} &= \sum_{\varrho} \Big([a_{\varrho 1}]_0\, \frac{\partial \bar{Z}^\varrho}{\partial x} + \Big[\frac{\partial a_{\varrho 1}}{\partial x}\Big]_0 A^\varrho\Big) + \sum_{\varrho} (a_{\varrho 1} - [a_{\varrho 1}]_0)\, \frac{\partial \bar{Z}^\varrho}{\partial x} \\ &\quad + \sum_{\varrho} \Big(\frac{\partial a_{\varrho 1}}{\partial x} - \Big[\frac{\partial a_{\varrho 1}}{\partial x}\Big]_0\Big)\, A^\varrho + \sum_{\varrho} \frac{\partial a_{\varrho 1}}{\partial x}\, (\bar{Z}^\varrho - A^\varrho), \end{aligned}$$

und hierin ist rechts die zweite, dritte und vierte Summe je eine Größe $O(\delta)$, was für die zweite, bezw. dritte Summe aus (34.) bezw. (35.), für die vierte aus (42.) und (34.) folgt. Wegen

$$\frac{\partial \bar{Z}^\varrho}{\partial x} = \sum_{\tau} [c^\varrho_{\tau 1}]_0\, A^\tau = \Big[\Big(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial x}\Big)\Big]_0$$

---

[1]) Für sie gilt offenbar in (8.):

(42.) $$\bar{Z}^j(x, y) - A^j = O(\delta).$$

können wir also unter Benutzung von (40.) und einer ganz analogen Berechnung von $\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y}$ einfach schreiben:

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\right]_0 + O(\delta), \quad \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} = \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]_0 + O(\delta).$$

Da aber das über S erstreckte Integral einer Größe erster Ordnung wegen (21.) eine Größe dritter Ordnung ist, so ist

$$(45.) \qquad {}^{(S)}\int \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y}\right) dS = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]_0 \Delta S + O(\delta^3).$$

Aus (43.), (44.), (45.) folgt die behauptete Gültigkeit der Gleichung (32.) auch unter den allgemeineren in diesem § gemachten Voraussetzungen [1]), d. h. es gilt

Satz 2. *Es seien die Zahlen* λ, μ *(beide* > 0*),* $K, K^*, K_1, K_1^*, K_1^{**}$ *(alle* $\geqq 0$*), ein Bereich* (8.) *und die in* (8.) *stetigen, differenzierbaren und den Ungleichungen* (9.), *bezw.* (33.), (34.), (35.) *genügenden Funktionen* $c_{\varrho\sigma}^{j}(x, y)$, $a_{\varrho\sigma}(x, y)$ *gegeben* [2]) $(j, \varrho = 1, \ldots m;$ $\sigma = 1, 2)$. *Haben dann* $P_0 = (x_0, y_0)$, L, Δx, Δy, ΔS *und das Vorzeichen* $\pm$ *die gleiche Bedeutung wie in Satz* 1, *werden die Abkürzungen* $[F(x, y)]_{(t)}$, $[F(x, y)]_0$ *gemäß* (2.) *erklärt, sind die Funktionen* $Z^j(t)$ *durch die Differentialgleichungen* (37.) *und die Anfangswerte* $Z^j(t_0) = A^j$ *bestimmt und wird*

$$X(t) = \sum_{\varrho} [a_{\varrho 1}]_{(t)} Z^{\varrho}(t), \quad Y(t) = \sum_{\varrho} [a_{\varrho 2}]_{(t)} Z^{\varrho}(t)$$

gesetzt, so gilt die Ungleichung

$$\left| \pm \int_{t_0}^{t_1} \Big(X(t)\, y'(t) - Y(t)\, x'(t) \Big)\, dt \right.$$
$$\left. - \sum_{\varrho} A^{\varrho} \left[\frac{\partial a_{\varrho 1}}{\partial x} + \frac{\partial a_{\varrho 2}}{\partial y} + \sum_{\tau} (a_{\tau 1}\, c_{\varrho 1}^{\tau} + a_{\tau 2}\, c_{\varrho 2}^{\tau}) \right]_0 \Delta S \right|$$
$$\leqq G\, (|\Delta x| + |\Delta y|)^3$$

wo G *eine Schranke bedeutet, die nur von* $\lambda, \mu, K, K^*, K_1, K^*, K_1^{**}, A^1, A^2, \ldots A^m$ *(also außer von den vorgegebenen Zahlen* λ, μ *und den Anfangswerten* A^j *nur von dem Bereich* (8.) *und den Funktionen* $c_{\varrho\sigma}^{j}$, $a_{\varrho\sigma}$*) abhängt, hingegen von* $\Delta x, \Delta y$, *von der speziellen Kurve* L *und von* P_0 *unabhängig ist.*

Zusatz 1. Für diese Schranke kann

$$(46.) \qquad G = 2\,[2m\,\mu^2\,K_1(2m\mu\,K^2(1 + m\lambda) + K^*) + K^{**} + 2m\,K\,K_1^*].\ \sum_{\varrho} |A^{\varrho}|$$

genommen werden. Dieser Zusatz folgt analog dem Zusatz 1 zu Satz 1 [3]), wenn man die im vorangehenden gemachten Feststellungen von Größenordnungen durch wirkliche Berechnung von Schranken ergänzt.

Zusatz 2. Es gelten entsprechende Bemerkungen wie in Zusatz 2 zu Satz 1.

---

[1]) Sie umfassen den in § 1 betrachteten Fall. Man braucht nur $m = 2$ und $a_{\varrho\sigma} = 1$ oder 0 für $\varrho = \sigma$ bzw. $\varrho \neq \sigma$ zu setzen.

[2]) Bezüglich der Existenz der Ableitungen der $c_{\varrho\sigma}^{j}$ bzw. $a_{\varrho\sigma}$ gilt das in Anm. 3, S. 144 bzw. Anm. 1, S. 149 gesagte.

[3]) Die dort (unter Benutzung der speziellen Verhältnisse) gefundene Schranke G ist die Hälfte der aus (46.) durch Spezialisierung für den Fall des § 1 (vgl. Anm. 1, S. 152) also für $K_1 = 1$, $K_1^* = K_1^{**} = 0$ sich ergebenden.

§ 3.

11. Die gegebenen Erweiterungen des *Gauß-Green*schen Integralsatzes lassen sich unmittelbar auf den *Stokes*schen Integralsatz übertragen. Der Beweis verläuft analog der bekannten Zurückführung des *Stokes*schen auf den *Gauß-Green*schen Satz, die wir — u. zw. sogleich für den Fall zweidimensionaler Bereiche in einem n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathfrak{R}_n$ — wegen des Parallelismus der späteren Rechnung anschreiben: Es bedeuten $\bar{S}$ einen Bereich der u-v-Ebene, $\bar{L}$ seine Begrenzung, die die in Nr. 2 für L gemachten Voraussetzungen erfülle, $\mathfrak{A}$ einen beschränkten abgeschlossenen Bereich des $\mathfrak{R}_n$; es seien

$$x_i = x_i\,(u, v) \qquad (i = 1, \ldots n)$$

zweimal stetig differenzierbare Funktionen [1]), vermöge welcher $\bar{S}$ eineindeutig auf ein in $\mathfrak{A}$ gelegenes Flächenstück S, zugleich $\bar{L}$ auf die Randkurve (das Randkurvensystem) L von S abgebildet wird; dS, $d\bar{S}$, dL, $d\bar{L}$ seien die entsprechenden Elemente, $dS_{h,l} = \dfrac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u,v)}\,d\bar{S}$ die „Projektion von dS auf die $x_h\,x_l$-Ebene", ebenso dx_i bezw. du und dv jene von dL bezw. $d\bar{L}$ auf die x_i- bezw. u- und v-Achse, „$\pm$" das analog wie früher bestimmte Vorzeichen; endlich seien $X_1, \ldots X_n$ in $\mathfrak{A}$ stetig differenzierbare Funktionen von $x_1, \ldots x_n$. Wird nun

$$\sum_i X_i(x_1(u,v), \ldots, x_n(u,v))\frac{\partial x_i}{\partial v} = U$$

$$\sum_i X_i(x_1(u,v), \ldots, x_n(u,v))\frac{\partial x_i}{\partial u} = -\,V$$

gesetzt, so ist gemäß (1.)

$$\pm \overset{(L)}{\int} \sum_i X_i\,dx_i = \pm \overset{(\bar{L})}{\int} (U dv - V du)$$

$$= \overset{(\bar{S})}{\int}\Big(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\Big)\,d\bar{S} = \overset{(\bar{S})}{\int}\Big(\sum_l \frac{\partial X_l}{\partial u}\frac{\partial x_l}{\partial v} - \frac{\partial X_l}{\partial v}\frac{\partial x_l}{\partial u}\Big)\,d\bar{S}$$

$$= \overset{(\bar{S})}{\int} \sum_h \sum_l \frac{\partial X_l}{\partial x_h}\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u,v)}\,d\bar{S} = \overset{(\bar{S})}{\int} \sum_{h<l}\Big(\frac{\partial X_l}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_l}\Big)\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u,v)}\,d\bar{S}$$

$$= \sum_{h<l} \overset{(S)}{\int}\Big(\frac{\partial X_l}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_l}\Big)\,dS_{h,l},$$

wobei $\sum_{h<l}$ eine Summation über alle Paare verschiedener Indizes h, l aus der Reihe $1, \ldots n$, jedes Paar der Größe nach angeordnet, bedeutet. Unter den genannten (hinreichenden) Bedingungen gilt also der *Stokes*sche Satz:

$$(47.) \qquad \pm \overset{(L)}{\int} \sum_i X_i\,dx_i = \sum_{h<l} \overset{(S)}{\int}\Big(\frac{\partial X_l}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_l}\Big)\,dS_{h,l}.$$

12. Für die nunmehr herzuleitende Erweiterung des *Stokes*schen Satzes auf Fälle, in denen die X_i *nicht* Ortsfunktionen sind, machen wir folgende Voraus-

---

[1]) Für die also $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial u}$ gilt, wovon unten Gebrauch gemacht wird.

setzungen[1]). Es seien $\lambda, \bar{\mu}$ (*beide* >0), $k, k^*, k_1, k_1^*, k_1^{**}, k_2, k_2^*, k_2^{**}, A^1, \ldots A^m$ gegebene Zahlen, es sei $\mathfrak{A}$ ein beschränkter abgeschlossener Bereich des $\mathfrak{R}_n$, ferner seien $c^j_{\varrho\sigma}(x_1, \ldots x_n)$ in $\mathfrak{A}$ stetige Funktionen mit beschränkten Ableitungen ($j, \varrho = 1, \ldots m$; $\sigma = 1, \ldots n$) und $a_{\varrho\sigma}(x_1, \ldots x_n)$ in $\mathfrak{A}$ stetige und stetig differenzierbare Funktionen, die den Ungleichungen

$$(48.) \qquad |c^j_{\varrho\sigma}| \leqq k, \quad \left|\frac{\partial c^j_{\varrho\sigma}}{\partial x_h}\right| \leqq k^*,$$

$$(49.) \qquad |a_{\varrho\sigma}| \leqq k_1, \quad \left|\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h}\right| \leqq k_1^*,$$

$$\left|\left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h}\right)_{(x_i^1)} - \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h}\right)_{(x_i^2)}\right| \leqq k_1^{**} \sum_i |x_i^1 - x_i^2|$$

genügen, unter (x_i^1), (x_i^2) irgend zwei Punkte in $\mathfrak{A}$ verstanden, für die die betreffende Ableitung zu bilden ist. $\bar{\mathfrak{B}}$ sei ein rechteckiger Bereich der u-v-Ebene:

$$u^* \leqq u \leqq u^{**}, \quad v^* \leqq v \leqq v^{**},$$

der durch die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $x_i = x_i(u, v)$ eindeutig auf den in $\mathfrak{A}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{B}$ abgebildet werde. Diese Funktionen mögen in $\bar{\mathfrak{B}}$ die Ungleichungen erfüllen:

$$(50.) \qquad \left|\frac{\partial x_i}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial x_i}{\partial v}\right| \leqq k_2, \quad \left|\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v}\right|, \left|\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}\right| \leqq k_2^*,$$

$$(51.) \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\right)_{(u_1, v_1)} - \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\right)_{(u_2, v_2)}\right| \leqq k_2^{**}(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$$

nebst zwei zu (51.) analogen Ungleichungen für $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v}$ und $\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}$. Es werde

$$n k k_2 = K, \quad n^2 k^* k_2^2 + n k k_2 = K^*$$

gesetzt. Ist dann

$$u = u(t), \quad v = v(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1)$$

eine ganz in $\bar{\mathfrak{B}}$ gelegene Kurve $\bar{C}$ mit stetigen und stückweise stetig differenzierbaren $u(t)$, $v(t)$ und einer der Ungleichung

$$\bar{s}(t) \leqq \frac{\lambda}{1 + m\lambda} \cdot \frac{1}{2K}, \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1)$$

genügenden Bogenlänge $\bar{s}(t)$, so sollen die Funktionen $Z^1(t), \ldots Z^m(t)$ durch das System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen

$$(52.) \qquad \frac{dZ^j}{dt} = \sum_{\varrho,\sigma} Z^\varrho [c^j_{\varrho\sigma}]_{(t)} \left(\left[\frac{\partial x_\sigma}{\partial u}\right]_{(t)} u'(t) + \left[\frac{\partial x_\sigma}{\partial v}\right]_{(t)} v'(t) \right)$$

mit den Anfangswerten $Z^j = A^j$ für $t = t_0$ definiert werden[2]). Daß tatsächlich hierdurch für alle t-Werte $t_0 \leqq t \leqq t_1$ eine Lösung bestimmt ist, erkennt man, wenn man

---

[1]) Man könnte bei dieser Erweiterung wieder zwei Fälle analog denen von § 1 bezw. § 2 unterscheiden, je nachdem die X_i längs geeigneter Kurven selbst durch Differentialgleichungen bestimmt sind oder lineare Verbindungen derart bestimmter Funktionen Z^j sind. Wir behandeln sofort den letzteren allgemeinen Fall, aus dem der erstere durch die Spezialisierung entsteht:

$$m = n, \; a_{\varrho\sigma} = 1 \text{ oder } 0 \text{ für } \varrho = \sigma \text{ oder } \neq \sigma.$$

[2]) In Analogie mit (2.), (17.) schreiben wir

$$F(x_1(u, v), \ldots, x_n(u, v); Z^1, \ldots, Z^m) = [F(x_1, \ldots, x_n; Z^1, \ldots, Z^m)]_{(u,v)},$$

$$F(x_1(u(t), v(t)), \ldots; Z^1(t), \ldots; u(t), v(t)) = [F(x_1, \ldots; Z^1, \ldots; u, v]_{(t)}, [F]_{(t_0)} = [F]_0.$$

(53.) $$\sum_\sigma [c^j_{\varrho\sigma}]_{(u,v)} \frac{\partial x_\sigma}{\partial u} = \bar{c}^j_{\varrho 1}(u,v), \quad \sum_\sigma [c^j_{\varrho\sigma}]_{(u,v)} \frac{\partial x_\sigma}{\partial v} = \bar{c}^j_{\varrho 2}(u,v)$$

setzt, wo dann aus (52.) das System

(54.) $$\frac{dZ^j}{dt} = \sum_\varrho Z^\varrho \left([\bar{c}^j_{\varrho 1}]_{(t)} u'(t) + [\bar{c}^j_{\varrho 2}]_{(t)} v'(t)\right)$$

wird. Denn damit befindet man sich in einem zu Nr. 9 (vgl. (37.), (9.)) völlig analogen Fall, wenn man noch die für alle Punkte von $\overline{\mathfrak{B}}$ geltenden Ungleichungen

$$|\bar{c}^j_{\varrho\tau}(u,v)| \leqq n k k_2 = K, \quad \left|\frac{\partial \bar{c}^j_{\varrho\tau}}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial \bar{c}^j_{\varrho\tau}}{\partial v}\right| \leqq n k k_2^* + n^2 k^* k_2^2 = K^*$$

beachtet, die aus den Formeln (53.) für die $\bar{c}^j_{\varrho\tau}$ und aus denen für ihre ersten Ableitungen, wie

$$\frac{\partial \bar{c}^j_{\varrho 1}}{\partial u} = \sum_\sigma c^j_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 x_\sigma}{\partial u^2} + \sum_{\sigma,i} \frac{\partial c^j_{\varrho\sigma}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_\sigma}{\partial u},$$

sowie aus (48.), (50.) folgen.

Sei weiter $\bar{P}_0 = (u_0, v_0)$ ein Punkt in $\overline{\mathfrak{B}}$, $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ sein Bildpunkt in $\mathfrak{B}$. Wir nehmen dann für $\bar{C}$ im besonderen solche einfache geschlossene Kurven $\bar{L}$, die von $\bar{P}_0$ ausgehen: $u(t_0) = u(t_1) = u_0$, $v(t_0) = v(t_1) = v_0$, und für die es zwei positive Zahlen Δu, Δv gibt, so daß $\bar{L}$ ganz dem Bereich

$$|u - u_0| \leqq \Delta u, \quad |v - v_0| \leqq \Delta v$$

angehört und daß die Gesamtlänge $\bar{s}(t_1)$ der Ungleichung

$$\bar{s}(t_1) \leqq \bar{\mu} . (|\Delta u| + |\Delta v|) = \bar{\mu}\, \bar{\delta}$$

genügt. $\bar{S}$ sei das von $\bar{L}$ begrenzte Flächenstück, $\Delta \bar{S}$ sein Flächeninhalt, L bezw. S das Bild von $\bar{L}$ bezw. $\bar{S}$ in $\mathfrak{B}$, $\Delta S_{h,l} = \overset{(\bar{S})}{\int} \frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u,v)}\, d\bar{S}$ der Inhalt der Projektion von S auf die $x_h x_l$-Ebene.

Für (52.) kann symbolisch (vgl. Anm. 1, S. 143)

$$\left(\frac{\partial Z^j}{\partial x_\sigma}\right) = \sum_\varrho c^j_{\varrho\sigma} Z^\varrho$$

geschrieben und entsprechend

$$\sum_\varrho [c^j_{\varrho\sigma}]_{u,v} Z^\varrho = \left[\left(\frac{\partial Z^j}{\partial x_\sigma}\right)\right]_{(u,v)}, \quad \sum_\varrho [c^j_{\varrho\sigma}]_0 A^\varrho = \left[\left(\frac{\partial Z^j}{\partial x_\sigma}\right)\right]_0$$

gesetzt werden. Wird noch

$$X_\sigma(t) = \sum_\varrho [a_{\varrho\sigma}]_{(t)} Z^\varrho(t)$$

gesetzt und entsprechend symbolisch

$$\left(\frac{\partial X_\sigma}{\partial x_h}\right) = \sum_\varrho \left\{\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h} Z^\varrho + a_{\varrho\sigma}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial x_h}\right)\right\},$$

$$\left[\left(\frac{\partial X_\sigma}{\partial x_h}\right)\right]_0 = \sum_\varrho \left\{\left[\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_h}\right]_0 A^\varrho + [a_{\varrho\sigma}]_0 \left[\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial x_h}\right)\right]_0\right\},$$

so gilt, wie wir *behaupten*, für das durch

$$\overset{(L)}{\underset{P_0}{\int}} \sum_i X_i dx_i = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i X_i(t) \left(\left[\frac{\partial x_i}{\partial u}\right]_{(t)} u'(t) + \left[\frac{\partial x_i}{\partial v}\right]_{(t)} v'(t)\right) dt$$

erklärte Kurvenintegral die Gleichung

$$(55.)\qquad \pm\int_{P_0}^{(L)} \sum_i X_i\,dx_i = \sum_{h<l}\left[\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_h}\right)-\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_l}\right)\right]_0 \Delta S_{h,l} + O(\bar\delta^3),$$

wobei $O(\bar\delta^3)$ eine Größe bezeichnet, die $\leqq \bar\delta^3$ mal einer nur von $\lambda, \bar\mu, k, k^*, k_1, k_1^*, k_1^{**}, k_2, k_2^*, k_2^{**}, A^1, \ldots A^m$ (nicht aber von $L, \Delta u, \Delta v$) abhängigen Schranke ist.

13. Der Beweis für diese Erweiterung des *Stokes*schen Satzes (47.) erfolgt einfach durch Anwendung des Satzes 2 bezw. der unter den Voraussetzungen dieses Satzes gültigen Formel (32.). Zunächst sieht man nämlich, daß die $Z^j(t)$ vermöge (54.) ganz analog bestimmt werden, wie in Nr. 9 vermöge (37.), wobei nur $u, v, c^j_{\varrho\sigma}$ anstelle von $x, y, c^j_{\varrho\sigma}$ treten. In Analogie mit (38.) kann man also symbolisch schreiben:

$$\left(\frac{\partial Z^j}{\partial u}\right) = \sum_\varrho \bar c^j_{\varrho 1} Z^\varrho = \sum_\sigma \left[\left(\frac{\partial Z^j}{\partial x_\sigma}\right)\right]_{(u,v)} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial u}$$

$$\left(\frac{\partial Z^j}{\partial v}\right) = \sum_\varrho \bar c^j_{\varrho 2} Z^\varrho = \sum_\sigma \left[\left(\frac{\partial Z^j}{\partial x_\sigma}\right)\right]_{(u,v)} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial v}.$$

Wird nun

$$(56.)\qquad \sum_i [a_{\varrho i}]_{u,v}\frac{\partial x_i}{\partial v} = \bar a_{\varrho 1}(u,v), \quad -\sum_i [a_{\varrho i}]_{(u,v)}\frac{\partial x_i}{\partial u} = \bar a_{\varrho 2}(u,v),$$

$$\sum_\varrho \bar a_{\varrho 1} Z^\varrho = U, \qquad \sum_\varrho \bar a_{\varrho 2} Z^\varrho = V$$

gesetzt, so wird

$$\begin{aligned}(57.)\qquad \int_{P_0}^{(L)} \sum_i X_i\,dx_i &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\varrho,i} Z^\varrho [a_{\varrho i}]_{(t)}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x_i}{\partial v}v'(t)\right)dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_\varrho Z^\varrho\Big([a_{\varrho 1}]_{(t)}v'(t) - [a_{\varrho 2}]_{(t)}u'(t)\Big)\,dt\\ &= \int_{\bar P_0}^{(\bar L)} (U\,dv - V\,du),\end{aligned}$$

wobei dieses letztere Integral in der u-v-Ebene ganz analog erklärt ist, wie das Integral (41.) in der x-y-Ebene und die $\bar a_{\varrho\sigma}$ die Rolle der dortigen $a_{\varrho\sigma}$ übernehmen. Dabei sind die $\bar a_{\varrho\sigma}(u,v)$ stetig differenzierbar und erfüllen in $\bar{\mathfrak{B}}$ die Ungleichungen

$$|\bar a_{\varrho\sigma}| \leqq K_1; \quad \left|\frac{\partial \bar a_{\varrho\sigma}}{\partial u}\right|, \ \left|\frac{\partial \bar a_{\varrho\sigma}}{\partial v}\right| \leqq K_1^*$$

(hierbei $n k_1 k_2 = K_1, \quad n k_1 k_2^* + n^2 k_1^* k_2^2 = K_1^*$ gesetzt),

wie aus (56.) und den daraus durch Differentiation nach u oder v gewonnenen Gleichungen unmittelbar hervorgeht. Seien ferner $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ zwei Punkte aus $\bar{\mathfrak{B}}$, (x_i^1) und (x_i^2) ihre Bildpunkte in $\mathfrak{B}$, so bedeute z. B. $(a_{\varrho\sigma})_\nu$ oder $\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_\nu$ den Wert der eingeklammerten Funktion im Punkt (u_ν, v_ν). Wird nun

$$n k_1^* k_2 = l^*, \quad n(n k_1^{**} k_2^2 + k_1^* k_2^*) = l^{**}$$

$$n(l^{**} k_2 + 2 k_2^* l^* + k_2^{**} k_1) = K_1^{**}$$

gesetzt, so gilt wegen (50.), (49.), (51.):

$$\sum_i |x_i^1 - x_i^2| \leqq n k_2 (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|),$$

$$\left|\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial u}\right| = \left|\sum_i \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right| \leqq l^*, \quad \left|\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial v}\right| \leqq l^* \qquad (\text{in } \mathfrak{B}),$$

$$\left|\left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial u}\right)_2\right| = \left|\sum_i \left(\left[\left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}\right)_1 - \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}\right)_2\right]\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_1 + \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}\right)_2\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_2\right]\right)\right|$$

$$\leqq n[k_2 k_1^{**} \sum_i |x_i^1 - x_i^2| + k_1^* k_2^* (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)] \leqq l^{**} (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|),$$

$$\left|\left(\frac{\partial \bar a_{\varrho 1}}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial \bar a_{\varrho 1}}{\partial u}\right)_2\right| = \left|\sum_i \left(\left[\left(\frac{\partial a_{\varrho i}}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial a_{\varrho i}}{\partial u}\right)_2\right]\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_1 + \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_1 - \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_2\right]\left(\frac{\partial a_{\varrho i}}{\partial u}\right)_2\right.$$

$$\left. + [(a_{\varrho i})_1 - (a_{\varrho i})_2]\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial u}\right)_1 + \left[\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial u}\right)_2\right](a_{\varrho i})_2\right)\Bigg|$$

$$\leqq K_1^{**}(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$$

nebst den analogen Ungleichungen für $\left|\left(\frac{\partial \bar a_{\varrho 2}}{\partial u}\right)_1 - \left(\frac{\partial \bar a_{\varrho 2}}{\partial u}\right)_2\right|$ und $\left|\left(\frac{\partial \bar a_{\varrho\sigma}}{\partial v}\right)_1 - \left(\frac{\partial \bar a_{\varrho\sigma}}{\partial v}\right)_2\right|$.

Es sind also alle Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt und es gilt somit gemäß (32.):

$$(58.) \qquad \pm \int_{\bar P_0}^{(L)} (U dv - V du) = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)\right]_0 \Delta \bar S + O(\bar\delta^3)$$

wobei

$$(59.) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) &= \sum_\varrho \left[\left(\frac{\partial \bar a_{\varrho 1}}{\partial u} + \frac{\partial \bar a_{\varrho 2}}{\partial v}\right) Z^\varrho + \bar a_{\varrho 1}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial u}\right) + \bar a_{\varrho 2}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial v}\right)\right] \\ &= \sum_{\varrho, l}\left[\left(\frac{\partial a_{\varrho l}}{\partial u}\frac{\partial x_l}{\partial v} - \frac{\partial a_{\varrho l}}{\partial v}\frac{\partial x_l}{\partial u}\right) Z^\varrho + a_{\varrho l}\frac{\partial x^l}{\partial v}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial u}\right) - a_{\varrho l}\frac{\partial x_l}{\partial u}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial v}\right)\right] \\ &= \sum_{l,h}\left[\frac{\partial a_{\varrho l}}{\partial x_h} Z^\varrho + a_{\varrho l}\left(\frac{\partial Z^\varrho}{\partial x_h}\right)\right]\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)} = \sum_{h,l}\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_h}\right)\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)} \\ &= \sum_{h<l}\left[\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_h}\right) - \left(\frac{\partial X_h}{\partial x_l}\right)\right]\frac{\partial(x_h, x_l)}{o(u, v)}. \end{aligned}$$

Aus (57.), (58.), (59.) folgt:

$$(60.) \quad \pm \int_{P_0}^{(L)} \sum_i X_i\, dx_i = \sum_{h<l}\left[\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_h}\right) - \left(\frac{\partial X_h}{\partial x_l}\right)\right]_0 \cdot \left[\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)}\right]_0 \Delta \bar S + O(\bar\delta^3).$$

Wegen

$$\left|\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)} - \left[\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)}\right]_0\right| = \left|\left(\frac{\partial x_h}{\partial u} - \left[\frac{\partial x_h}{\partial u}\right]_0\right)\frac{\partial x_l}{\partial v}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial x_l}{\partial v} - \left[\frac{\partial x_l}{\partial v}\right]_0\right)\left[\frac{\partial x_h}{\partial u}\right]_0 - \left(\frac{\partial x_h}{\partial v} - \left[\frac{\partial x_h}{\partial v}\right]_0\right)\frac{\partial x_l}{\partial u} - \left(\frac{\partial x_l}{\partial u} - \left[\frac{\partial x_l}{\partial u}\right]_0\right)\left[\frac{\partial x_h}{\partial v}\right]_0\right|$$

$$\leqq 4 k_2 k_2^*(|u - u_0| + |v - v_0|), \text{ also } \frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)} - \left[\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)}\right]_0 = O(\bar\delta) \text{ und}$$

$$(61.) \quad \Delta S_{h,l} - \left[\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)}\right]_0 \Delta \bar S = \int^{(\bar S)} \left(\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)} - \left[\frac{\partial(x_h, x_l)}{\partial(u, v)}\right]_0\right) d\bar S = O(\bar\delta^3)$$

kann man für (60.) auch (55.) schreiben.

In Gleichung (55.) oder (60.) ist die zu beweisende Erweiterung des *Stokes*schen Integralsatzes (47.) enthalten, die sich leicht in Analogie mit den Sätzen 1 und 2 nebst ihren Zusätzen in die Gestalt einer Ungleichung mit ausgerechneter Schranke setzen ließe.

Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper.

Von Herrn *Helmut Hasse* in Kiel.

Ich behandle in dieser Arbeit im Anschluß an meine vorhergehenden Arbeiten [1]) die Frage, unter welchen Bedingungen zwei quadratische Formen in enem beliebigen algebraischen Zahlkörper k äquivalent sind, d. h. durch eine umkehrbare, lineare Substitution mit Koeffizienten aus k zusammenhängen. Wie ich in H II, S. 206 ff. ausführte, ist die entsprechende Frage für den rationalen Körper R bereits durch *Minkowski* [2]) gelöst, und zwar auf Grund seiner umfassenden Theorie der Geschlechter quadratischer Formen. Während nun zur Übertragung der *Minkowski*schen Methode für die Aufstellung eines vollständigen Invariantensystems gegen Transformation quadratischer Formen in R auf einen beliebigen algebraischen Zahlkörper k vorher die Aufstellung einer entsprechenden Theorie der Geschlechter quadratischer Formen in k erforderlich wäre, (womit zudem, wie ich in H I, S. 129/130, H II, S. 208 näher ausführte, nicht in der Natur der Sache liegende Hilfsmittel herangezogen würden), ist meine in H II verwendete, auf der *Hensel*schen Theorie der p-adischen Zahlen beruhende Methode einer direkten Übertragung auf algebraische Körper fähig. Die Entwicklungen und Resultate sind fast wörtlich dieselben wie für den rationalen Körper in H II, so daß eine kurze Skizze unter Hervorhebung der wenigen Abweichungen genügt.

§ 1. Das vollständige Invariantensystem gegen Transformation in k.

Sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper. Ich betrachte quadratische Formen

$$f = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik} x_i x_k; \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

mit Koeffizienten aus k und denke mir auf sie umkehrbare, lineare Substitutionen

---

[1]) Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen, Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen, dieses Journal, Bd. 152, S. 129 ff., S. 205 ff., Bd. 153, S. 12 ff., im folgenden zitiert mit H I, H II, H III. Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, dieses Journal, Bd. 153, S. 113, im folgenden zitiert mit A I.

[2]) Betr. Literaturangaben siehe H II.

$$x_i = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ik} x'_k; \quad |\sigma_{ik}| \neq 0$$

mit Koeffizienten aus k angewendet. Dabei bleiben zunächst der Rang n des Koeffizientensystems (a_{ik}) und der Diskriminantenkern $[\delta]$ [1]) von f invariant. Außer diesen beiden trivialen Invarianten existieren noch eine unendliche Reihe invarianter Einheiten $c_\mathfrak{p} = \pm 1$, nämlich für jeden Primleiter $\mathfrak{p}$ von k eine, von denen jede einzelne gegen Transformation in dem betr. *Hensel*schen Erweiterungskörper $k(\mathfrak{p})$ invariant ist, sodaß das vollständige System $(c_\mathfrak{p})$ invariant gegen Transformation in k ist. Die Existenz dieser Invarianten $c_\mathfrak{p}$ beruht wie in H II auf dem Satz:

Satz 1. *Sind zwei reine Formen*

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \text{ und } g_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^2; \quad (a_i, \beta_i \neq 0)$$

in irgendeinem $k(\mathfrak{p})$ äquivalent, so stimmen die Einheiten

$$c_\mathfrak{p}(f_0) = \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{p}}\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a_i, a_k}{\mathfrak{p}}\right) \text{ und } c_\mathfrak{p}(g_0) = \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{p}}\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\beta_i, \beta_k}{\mathfrak{p}}\right)$$

überein.

Der in H II für den entsprechenden Satz gegebene Beweis überträgt sich, wie man leicht bestätigt, mittels der in A I angegebenen Sätze über das *Hilbert*sche Symbol wörtlich auf den hier vorliegenden Fall, so daß ich darauf nicht näher eingehe. Aus Satz 1 ergibt sich dann die Existenz des Invariantensystems $(c_\mathfrak{p}(f))$ für beliebige quadratische Formen f.

Die Invarianten $c_\mathfrak{p}$ drücken sich in den Fällen $n = 1, 2, 3$ in folgender Weise durch die in A I erhaltenen $\check{c}_\mathfrak{p}, \hat{c}_\mathfrak{p}$ und den Diskriminantenkern $[\delta]$ aus (H II, S. 216, (20.)—(22.)):

(1.) für $n = 1$: $\quad c_\mathfrak{p} \equiv \left(\frac{-\delta, -1}{\mathfrak{p}}\right)$,

(2.) „ $n = 2$: $\quad c_\mathfrak{p} \equiv \left(\frac{-\delta, -1}{\mathfrak{p}}\right) \check{c}_\mathfrak{p}$,

(3.) „ $n = 3$: $\quad c_\mathfrak{p} \equiv \hat{c}_\mathfrak{p}$.

Für eine zerfallende Form $f = \varphi + \psi$ gilt wieder (H II, S. 217, (24.)):

(4.) $$c_\mathfrak{p}(f) \equiv \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{p}}\right) c_\mathfrak{p}(\varphi)\, c_\mathfrak{p}(\psi) \left(\frac{\delta(\varphi), \delta(\psi)}{\mathfrak{p}}\right).$$

Zu den bisher genannten Invarianten n; $[\delta]$; $(c_\mathfrak{p})$ treten noch die weiteren: $J_1, \ldots, J_r$, nämlich die Trägheitsindizes für die *Hensel*schen Körper $k(\mathfrak{p}_\infty^{(1)}), \ldots, k(\mathfrak{p}_\infty^{(r)})$, (d. h. die r reellen zu k konjugierten Körper). Das so erhaltene Invariantensystem n; $[\delta]$; (J_ν); $(c_\mathfrak{p})$ ist *das vollständige Invariantensystem gegen Transformation in k*, d. h. es gilt:

Satz 2. *Quadratische Formen sind dann und nur dann äquivalent in k, wenn ihre Invarianten n; $[\delta]$; (J_ν); $(c_\mathfrak{p})$ übereinstimmen.*

---

[1]) Bezüglich der Bezeichnungen verweise ich auf A I. Siehe hierzu speziell A I, S. 117, Anm. 1.

Der Beweis läßt sich auf Grund von (4.) wieder genau wie in H II durch vollständige Induktion erbringen, wenn man berücksichtigt, daß nach den Sätzen von A I (siehe Tabelle 1.) am Schluß) zwei solche Formen sicher ein von Null verschiedenes μ aus k gemeinsam in k darstellen.

Das vollständige Invariantensystem gegen Transformation in k setzt sich zusammen aus den Invarianten gegen Transformation in den einzelnen *Hensel*schen $k(\mathfrak{p})$. Für die Äquivalenz in einem solchen $k(\mathfrak{p})$ ergibt sich als notwendig und hinreichend:

1. für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ einer endlichen Primzahl p das Übereinstimmen der Invarianten n, $\delta_{\mathfrak{p}}$, $c_{\mathfrak{p}}$,
2. für eine der Stelle p_∞ zugeordnete Stelle $\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}$ das Übereinstimmen der Invarianten n, J_ν.

Die Invarianten $\delta_{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}$, $c_{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}$, haben neben J_ν keine selbständige Bedeutung, denn es gilt wie in H II (S. 218, (28.), (29.)):

$$\delta_{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}} = (-1)^{J_\nu}, \tag{5.}$$

$$c_{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}} = (-1)^{\frac{J_\nu(J_\nu+1)}{2}+1}. \tag{6.}$$

Demnach ergibt sich die Gültigkeit des schon in A I (S. 114) genannten Prinzips:

Satz 3. *Quadratische Formen sind dann und nur dann in k äquivalent, wenn sie in allen $k(\mathfrak{p})$ äquivalent sind.*

§ 2. Die Komplexe äquivalenter Formen.

Alle in k äquivalenten Formen fasse ich in einen Formenkomplex zusammen, der also durch sein Invariantensystem n; $[\delta]$; (J_ν); $(c_{\mathfrak{p}})$ eindeutig bestimmt ist. Nicht zu jedem beliebig vorgegebenen Invariantensystem gehört ein wirklicher Komplex, vielmehr müssen zwischen den Invarianten gewisse Beziehungen bestehen, nämlich erstens die schon genannten (5.) und (6.) sowie

$$0 \leqq J_\nu \leqq n; \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r), \tag{7.}$$

ferner nach dem allgemeinen quadratischen Reziprozitätsgesetz:

$$\prod_{\mathfrak{p}} c_{\mathfrak{p}} = +1, \tag{8.}$$

da $c_{\mathfrak{p}}$ ein Produkt von *Hilbert*schen Normenrestsymbolen ist, schließlich, wie in H II (S. 221, (37 a.), (37 b.)), als Folge von (1.), (2.) und Satz 4 in A I, die beiden Spezialbedingungen:

$$\text{(9.)} \quad \text{für } n = 1: \quad c_{\mathfrak{p}} \equiv \left(\frac{-\delta, -1}{\mathfrak{p}}\right),$$

$$\text{(10.)} \quad ,, \quad n = 2: \quad c_{\mathfrak{p}} = +1 \quad \text{für} \quad \left(\frac{-\delta}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Für $n = 1, 2, 3$ ergibt sich aus (5.), (6.), (7.), daß alle Invarianten J_ν durch die Invarianten $c_{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}$, $\delta_{\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)}}$ bestimmt sind, so daß die Einführung der J als besonderer Invarianten erst von $n = 4$ an erforderlich wird. Ich beweise nun wie

in H II, daß die angegebenen notwendigen Bedingungen (5.)—(10.) für die Existenz eines Komplexes ausreichen:

Satz 4. *Zu einem vorgegebenen Invariantensystem* n; $[\delta]$; (J_ν); $(c_\mathfrak{p})$ *existiert dann und nur dann ein Komplex quadratischer Formen in* k, *wenn zwischen den Invarianten die Beziehungen* (5.)—(10.) *bestehen.*

Beweis: Für $n=1$ ist nach (5.)—(9.) $[\delta]$ die einzige unabhängige Invariante und zu ihr gehört stets der Komplex aller zu $f=\delta x^2$ äquivalenten Formen.

Für $n=2$ weise ich die Existenz einer Zahl $\mu \neq 0$ aus k nach, so daß die binäre Form

$$f=\mu(x^2+\delta y^2)$$

der Invariante $[\delta]$ auch das vorgegebene Invariantensystem $(c_\mathfrak{p})$ hat. Dazu ist, wie in H II, μ als Lösung von

$$\left(\frac{-\mu,-\delta}{\mathfrak{p}}\right)\equiv c_\mathfrak{p} \tag{11.}$$

zu wählen. Aus (10.) folgt, daß diese Beziehung für jedes einzelne $\mathfrak{p}$ sicher durch ein $\mu_\mathfrak{p} \neq 0$ aus $k(\mathfrak{p})$ lösbar ist. Denn ist $-\delta$ Quadrat in $k(\mathfrak{p})$, also nach (10.) $c_\mathfrak{p}=+1$, so genügt jedes $\mu_\mathfrak{p}$ der Gleichung (10.), ist aber $-\delta$ Nichtquadrat in $k(\mathfrak{p})$, so hat das Symbol $\left(\frac{-\mu_\mathfrak{p},-\delta}{\mathfrak{p}}\right)$ für genau eine Hälfte aller $\mu_\mathfrak{p}$ aus $k(\mathfrak{p})$ den Wert $+1$, für die andere Hälfte den Wert -1 (siehe A I, S. 120, (5.)—(7.)), so daß (11.) ebenfalls durch ein $\mu_\mathfrak{p} \neq 0$ aus $k(\mathfrak{p})$ lösbar ist. Bezeichnet dann $\bar{\mathfrak{p}}$ jeden der (wegen (8.) nur endlich vielen) zu 2 primen Primteiler aus k, für den

entweder $c_{\bar{\mathfrak{p}}}=-1$

oder $c_{\bar{\mathfrak{p}}}=+1$, aber $\bar{\mathfrak{p}}$ in ungerader Potenz in δ enthalten ist, ferner $\mathfrak{l}$ jeden Primteiler der 2, $\mathfrak{p}_\infty$ die Primteiler 1. Grades von $\mathfrak{p}_\infty$, so kann man wörtlich wie in A I, S. 125/26 auf Grund des Satzes, daß in jeder allgemeinsten Idealklasse unendlich viele Primideale enthalten sind, eine Zahl $\mu \neq 0$ aus k mit der Primidealzerlegung:

$$(\mu)=\Pi\bar{\mathfrak{p}}^{\bar{a}}\cdot\Pi\mathfrak{l}^{a}\cdot\mathfrak{r};\quad(\mathfrak{r}\text{ zu }\Pi\bar{\mathfrak{p}}\cdot\Pi\mathfrak{l}\text{ primes Primideal})$$

finden, die sich von irgendwie ausgewählten Lösungen $\mu_{\bar{\mathfrak{p}}}$, $\mu_\mathfrak{l}$, $\mu_{\mathfrak{p}_\infty}$ der Gleichung (11.) nur um Quadratzahlen der betr. $k(\mathfrak{p})$ unterscheidet, also für $\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{p}}, \mathfrak{l}, \mathfrak{p}_\infty$ der Bedingung (11.) ebenfalls genügt. Auf Grund des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes $\prod_\mathfrak{p}\left(\frac{-\mu,-\delta}{\mathfrak{p}}\right)=+1$ und wegen (8.) folgt dann leicht, daß μ für alle $\mathfrak{p}$ Lösung von (11.) ist. Damit ist die Existenz einer binären Form der Invarianten $[\delta]$; $(c_\mathfrak{p})$ nachgewiesen.

Für $n=3$ und $n>3$ ergibt sich dann die Richtigkeit des Satzes 4 wie in H II unter Benutzung von Gl. (4.) durch Zurückführung auf den eben bewiesenen Fall $n=2$.

Die erhaltenen Resultate, auf Grund deren man die Komplexe quadratischer Formen in k durch ihre Invariantensysteme n; $[\delta]$; (J_ν); $(c_\mathfrak{p})$ vollständig beherrscht, führen zu einer wörtlichen Übertragung der Entwicklungen meiner früheren Ar-

beit HIII über die allgemeinst-möglichen Darstellbarkeitsprobleme durch quadratische Formen, (nämlich die Darstellbarkeit eines Komplexes durch einen anderen sowie die höhere Darstellbarkeit der Null durch eine Komplexschar), auf den Fall eines beliebigen algebraischen Grundkörpers k. Alle dort erhaltenen Resultate bestehen bis auf unwesentliche Abweichungen, (die hauptsächlich durch das Auftreten mehrerer $k(\mathfrak{p}_\infty^{(\nu)})$ und J_ν bedingt sind), unverändert fort und werden ganz analog bewiesen. Ich brauche daher auf die Übertragung der genannten Arbeit nicht näher einzugehen.

Eine ganzzahlige Transformation einer ternären quadratischen Form.

Von Herrn *A. Arwin* in Lund.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß eine Gleichung

$$\chi(x, x', x'') = x^2 + Ax'^2 + Bx''^2$$

stets vermittelst einer ganzzahligen Transformation in folgender Weise

$$(\alpha) \qquad \chi(x, x', x'') = |AB|\, M^2(y^2 + \text{Sign. } Ay'^2 + \text{Sign. } By''^2)$$

umgeformt werden kann. Die Bedingungen sind

$$(\beta) \quad \begin{gathered} A = |A| \text{ Sign. } A,\ A = r_1 A_1,\ B = r_1 B_1,\ (A_1, B_1) = 1,\ m_1^2 + A \equiv 0 \pmod{B_i}, \\ m_2^2 + B \equiv 0 \pmod{A_i},\ m_3^2 + A_1 B_1 \equiv 0 \pmod{r_i}, \end{gathered}$$

wo A und B ohne quadratische Teiler vorausgesetzt werden, und A_i, B_i, r_i Primteiler in A_1, B_1, r_1 respektive sind. Dies stimmt mit den Resultaten von *Gauß*, *Dirichlet* und *Legendre* [1]) überein. Die Existenz einer ganzzahligen, linearen Transformation ist mit dem Bestehen folgender Bedingungsgleichungen

$$(\gamma) \quad \begin{gathered} (\alpha_1^0)^2 + (\alpha_1^1)^2 \text{ Sign. } A + (\alpha_1'')^2 \text{ Sign. } B = |B|\, M^2 \text{ Sign. } A \\ (\alpha_2^0)^2 + (\alpha_2^1)^2 \text{ Sign. } A + (\alpha_2'')^2 \text{ Sign. } B = |A|\, M^2 \text{ Sign. } B \\ \alpha_1^0\, \alpha_2^0 + \alpha_1^1\, \alpha_2^1 \text{ Sign. } A + \alpha_1''\, \alpha_2'' \text{ Sign. } B = 0 \end{gathered}$$

usw.

verbunden. Umgekehrt läßt sich beweisen, daß man aus den drei angeschriebenen Gleichungen (γ) die drei übrigen Elemente der Transformation, die (α) bewirkt, stets eindeutig bestimmen kann. Dabei kommen die Bedingungen (β) wieder hervor, woraus erschlossen werden kann, daß die Bedingungen (β) und (γ) für die Existenz der besagten Transformation völlig gleichberechtigt sind. Von dieser Tatsache aus wird das *Gauß*sche Schema der Transformationen der Form $x^2 + x'^2 + x''^2$ in sich abgeleitet. Es ist von Interesse, daß wir infolge Darlegungen bei *Gauß* schließen können, daß $M^2 = 1$ in (γ) stets gewählt werden darf. Zum Schluß werden auch ähnliche Untersuchungen über die allgemeine ternäre Form

$$f(x, x', x'') = \begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$$

durchgeführt. Die verschiedenen Hauptformeln werden durch Beispiele erläutert.

---

[1]) *Bachmann, P.:* Die Arithmetik der quadratischen Formen, S. 198 ff., *Lejeune-Dirichlet, F. G.:* Vorlesungen über Zahlentheorie, 1894, S. 428 ff., *Legendre, A. M.:* Zahlentheorie (Deutsch v. *Maser, H.*), Bd. I, S. 36 ff.

Wir werden also von der Form

$$x^2 + Ax'^2 + Bx''^2 \tag{1.}$$

ausgehen, wo A und B ohne irgendwelche quadratischen Teiler vorausgesetzt werden und den folgenden Kongruenzen

$$\begin{aligned} m_1^2 + A &\equiv 0 \pmod{B_i} \\ m_2^2 + B &\equiv 0 \pmod{A_i} \\ m_3^2 + A_1 B_1 &\equiv 0 \pmod{r_i} \end{aligned} \tag{2.}$$

für jeden Primteiler A_i, B_i und r_i in $A = r_1 A_1$, $B = r_1 B_1$ unterliegen. Da also B_1 und r_1 relativ prim sein müssen, kann n_1 stets aus $m_1 \equiv r_1 n_1 \pmod{B_1}$ gewonnen werden. Wir haben daher $(r_1 n_1)^2 + A \equiv 0 \pmod{B_1}$, $(r_1 n_1)^2 + A \equiv 0 \pmod{r_1}$, d. h. die Kongruenz $t_1^2 + A \equiv 0 \pmod{B}$ wie auch $t_2^2 + B \equiv 0 \pmod{A}$ werden gleichzeitig mit (2.) lösbar. Angenommen, daß wir $|A| < |B|$ haben, wo $A = |A|$ Sign. A bedeuten soll, ergibt

$$t_1^2 + A = \delta\,|B| \tag{3.}$$

für $A > 0$, $\delta > 0$ und $t_1 \leq |B|/2$ die Ungleichung $\delta|B| = t_1^2 + A \leq |B|^2/4 + |B| < |B|^2$, weil $|B|^2 + 4|B| < 4|B|^2$ infolge $|B| + 2 \leq 2|B|$ für alle $|B| \geq 2$ erfüllt ist. Für $\delta > 0$, $A < 0$ und $t_1 < |B|$ wird $\delta|B| = t_1^2 + A < |B|^2$, d. h. unter allen Umständen $0 < \delta < |B|$. Vermöge der Transformation $x = t_1 y - Ay'$, $x' = y + t_1 y'$, $x'' = \delta\, y''$ wird

$$\begin{aligned} x^2 + Ax'^2 + Bx''^2 &= y^2(t_1^2 + A) + A\,y'^2(t_1^2 + A) + \delta^2 B y''^2 \\ &= \delta\,|B|\,(y^2 + A\,y'^2 + \delta \text{ Sign. } B y''^2). \end{aligned} \tag{3'.}$$

Infolge (3.) haben wir $t_1^2 \equiv$ Sign. $BB\delta \pmod{A_1}$ und zufolge (2.) $m_2^2 + B \equiv 0 \pmod{A_1}$, d. h. $s_1^2 + \delta$ Sign. $B \equiv 0 \pmod{A_1}$, da A_1 und B relativ prim sind. Aus (3.) kommen auch $r_1 n_2^2 + A_1 = \delta\,|B_1|$, $r_1 B_1 n_2^2 + A_1 B_1 =$ Sign. $BB_1^2\,\delta$ und aus (2.) $- A_1 B_1 \equiv m_3^2 \pmod{r_1}$, d. h. $s_2^2 + \delta$ Sign. $B \equiv 0 \pmod{r_1}$ für B_1 und r_1 relativ prim. Wir haben daher $s_2^2 + \delta$ Sign. $B \equiv 0 \pmod{|A|}$, $s_4^2 + A \equiv 0 \pmod{\delta}$. Sind A und δ mit einem gemeinsamen Teiler ausgestattet, der doch sicher nicht in r_1 ganz oder teilweise aufgehen kann, da A und B ohne quadratische Faktoren genommen wurden, so ergibt sich infolge (3.) $r_2 n_3^2 + A_2 = \delta_2\,|B|$ für $A = r_2 A_2$, $\delta = r_2 \delta_2$. Aus $n_3^2 r_2 \delta_2 + A_2 \delta_2 = \delta_2^2\,|B| =$ Sign. $BB\,\delta_2^2$ und $m_2^2 + B \equiv 0 \pmod{|A| = r_2\,|A_2|}$ folgt $A_2 \delta_2$ Sign. $B + (m_2 \delta_2)^2 \equiv 0 \pmod{r_2}$, da B und r_2 re-relativ prim sein müssen. In

$$y^2 + A\,y'^2 + \text{Sign. } B\,\delta\,y''^2$$

haben wir deshalb eine Form von derselben Natur wie (1.) und denselben Zeichenkombinationen, wo aber $\delta < |B|$ geworden ist. Diese Reduktion wird für alle $\delta_\nu > |A|$ fortgesetzt. Für $\delta_\tau < |A|$ vertauschen wir $|A|$ und δ_τ in der obigen Methode. In der Weise fahren wir fort, bis zuletzt eine von den beiden Größen $|A|$ oder $|B|$ bis auf Eins niedergedrückt worden ist. Wir erhalten beispielsweise $x^2 +$ Sign. $Ax'^2 +$ Sign. $B\delta_\nu x''^2$. Für Sign. $A > 0$ wird die Reduktion wie oben bis auf $\delta_\tau = 1$ getrieben; für Sign. $A < 0$ wollen wir $(\delta_\nu - 1)^2 - 1 = \delta_\nu\,(\delta_\nu - 2)$ gebrauchen, um δ_ν noch weiter zu vermindern. Wenn δ_ν ungerade ist, muß auch jetzt zuletzt ein $\delta_\tau = 1$ gewonnen werden, wenn $\delta_\nu = 2(2n + 1)$ ist, wird

$\delta_\nu - 2 = 4n$, d. h. wir haben $\delta_{\nu+1} = n$, weil der quadratische Teiler 4 leicht wegtransformiert wird. Tritt n noch immer gerade auf, wiederholen wir diesen Prozeß und erhalten entweder $\delta_\tau = 1$ oder $= 8$. In diesem letzten Falle macht $3^2 - 1 = 8 \cdot 1$, daß $\delta_{\tau+1} = 1$ wird.

Unter allen Umständen muß daher auf Grund der Bedingungen (2.) die Transformation

$$\chi(x, x', x'') = x^2 + Ax'^2 + Bx''^2 = L(y^2 + \text{Sign. } Ay'^2 + \text{Sign. } By''^2)$$

vermittelst einer ganzzahligen Substitution durchgeführt werden können. Wir gehen nun von dieser Relation als existierend aus und wollen umgekehrt die Eigenschaften der Substitution, wodurch sie vermittelt worden ist, untersuchen. Da aber jede ternäre, quadratische Form [1])

$$f(x, x', x'') = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx' \tag{4.}$$
$$= \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

mit der Adjungierten

$$\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$$

in $aA'\, f(x, x', x'') = A'(ax + b''x' + b'x'')^2 + (A'x'' - Bx')^2 + Dax'^2$

umgeformt werden kann, folgt, wie alsbald ausführlicher dargelegt werden soll, daß jede Form (4.) zufolge Bedingungen, die (2.) gleichwertig sind, vermittelst einer ganzzahligen Transformation mit der Determinante DM^3 in

$$f(x, x', x'') = DM^2(y^2 - y'^2 - y''^2) \tag{4'.}$$

oder in

$$f(x, x', x'') = DM^2(y^2 + y'^2 + y''^2) \tag{4''.}$$

übergeführt werden kann, je nachdem die Form f indefinit oder definit ist; D heißt die Diskriminante der Form f. Für den Anfang wollen wir mit der Gleichung

$$x^2 + Ax'^2 + Bx''^2 = C(y^2 + \text{Sign. } Ay'^2 + \text{Sign. } By''^2) \tag{5.}$$

für Werte $A = ab$, $B = ac$, die den Bedingungen (2.) unterliegen, die Untersuchung durchführen. Wir können dann annehmen, daß die Relation (5.) durch eine Transformation [2])

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0^0 y + \alpha_0^1 y' + \alpha_0'' y'' \\ x' &= \alpha_1^0 y + \alpha_1^1 y' + \alpha_1'' y'' \\ x'' &= \alpha_2^0 y + \alpha_2^1 y' + \alpha_2'' y'' \end{aligned} \tag{6.}$$

mit der Determinante oder, wie man auch sagt, mit dem Modulus Δ vermittelt wird. Für die Größen α_i^k erhalten wir folgendes System von Bedingungen

$$\begin{aligned} (\alpha_0^0)^2 + A(\alpha_1^0)^2 + B(\alpha_2^0)^2 &= C \\ (\alpha_0')^2 + A(\alpha_1')^2 + B(\alpha_2')^2 &= C \text{ Sign. } A \\ (\alpha_0'')^2 + A(\alpha_1'')^2 + B(\alpha_2'')^2 &= C \text{ Sign. } B \\ \alpha_0^0 \alpha_0' + A\alpha_1^0 \alpha_1' + B\alpha_2^0 \alpha_2' &= 0 \\ \alpha_0^0 \alpha_0'' + A\alpha_1^0 \alpha_1'' + B\alpha_2^0 \alpha_2'' &= 0 \\ \alpha_0' \alpha_0'' + A\alpha_1 \alpha_1'' + B\alpha_2' \alpha_2'' &= 0. \end{aligned} \tag{7.}$$

---

[1]) *Bachmann, P.:* Die Arithmetik usw. („A" zitiert), S. 7, 8 und 11.

[2]) *Bachmann, P.:* Die Arithmetik usw., S. 14.

Wir haben auch die Relation [1])

$$\text{(8.)} \qquad \text{Sign. } A \text{ Sign. } BC^3 = AB\,\Delta^2,$$

d. h.

$$\text{(8'.)} \qquad C^3 = |AB|\,\Delta^2.$$

Infolge der ersten, vierten und fünften Gleichung in (7.) erhalten wir

$$a_0^0\,\Delta = C(a_1' a_2'' - a_1'' a_2'),$$

wie auch

$$\text{(9.)} \qquad \begin{aligned} -a_0'\,\Delta &= C \text{ Sign. } A(a_1^0 a_2'' - a_1'' a_2^0) \\ a_0''\,\Delta &= C \text{ Sign. } B(a_1^0 a_2' - a_1' a_2^0). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (9.) das erste Mal mit a_1^0, a_1' Sign. A, a_1'' Sign. B, das zweite Mal mit a_2^0, a_2^1 Sign. A, a_2'' Sign. B und schließlich das dritte Mal mit a_0^0, a_0' Sign. A, a_0'' Sign. B und addieren, so ergibt sich

$$\text{(10.)} \qquad \begin{aligned} a_0^0 a_1^0 + \text{Sign. } A\, a_0' a_1' + \text{Sign. } B\, a_0'' a_1'' &= 0 \\ a_0^0 a_2^0 + \text{Sign. } A\, a_0' a_2' + \text{Sign. } B\, a_0'' a_2'' &= 0 \\ (a_0^0)^2 + \text{Sign. } A(a_0')^2 + \text{Sign. } B(a_0'')^2 &= 0. \end{aligned}$$

In derselben Weise wie aus (9.) werden folgende Gleichungen gewonnen:

$$\text{(11.)} \qquad A\Delta a_1^0 = -(a_0^1 a_2'' - a_0'' a_2')\,C$$

$$\text{(11'.)} \qquad \begin{aligned} -A\Delta a_1 &= -(a_0^0 a_2'' - a_0'' a_2^0)\,C \text{ Sign. } A \\ A\Delta a_1'' &= -(a_0^0 a_2' - a_0' a_2^0)\,C \text{ Sign. } B, \end{aligned}$$

wie

$$\text{(11''.)} \qquad \begin{aligned} B\Delta a_2^0 &= (a_0' a_1'' - a_0'' a_1')\,C \\ -B\Delta a_2' &= (a_0^0 a_1'' - a_0'' a_1^0)\,C \text{ Sign. } A \\ B\Delta a_2'' &= (a_0^0 a_1' - a_0' a_1^0)\,C \text{ Sign. } B. \end{aligned}$$

An (8'.) können wir folgendes anknüpfen. Für $A = A_1 r_1$, $B = B_1 r_1$, wo A und B ohne quadratische Teiler und A_1 und B_1 relativ prim sind, folgt aus (8'.) $C \equiv 0$ (mod. $A_1 B_1 r_1$), d. h. $C/|A_1 B_1|\, r_1 = r_1 \cdot \Delta^2/C^2$ ganze Zahl. Sind A und B relativ prim, so folgern wir aus dieser Gleichung, daß $\Delta/C = M =$ ganze Zahl wird. Andernfalls mag r_2 der größte gemeinsame Faktor von C und r_1 sein, also $r_1 = r_2 r_2'$, $C = r_2 C_1$ und C_1 und r_2' relativ prim. Dann muß auch $r_2' \cdot \Delta^2/r_2 C_1^2$, d. h. $\Delta^2/r_2 C_1^2$ als ganze Zahl auftreten, da doch r_2 und r_2' ohne gemeinsame Teiler sein müssen. Wir haben daher $\Delta = r_2 \Delta_1$ und $r_2 \Delta_1^2/C_1^2$ ganzzahlig. Demselben Verfahren wie oben folgend, muß zuletzt ein Bruch $r_{\nu+1}\,\Delta_\nu^2/C_\nu^2$ hervorgehen, wo entweder $r_{\nu+1} = 1$ ist, oder auch C_ν und $r_{\nu+1}$ relativ prim werden. In beiden Fällen wird doch Δ_ν/C_ν ganzzahlig und daher $\Delta_\nu = C_\nu M$. Rückwärts erhalten wir nun $\Delta_{\nu-1} = r_{\nu+1}\,\Delta_\nu = r_{\nu+1} C_\nu M = C_{\nu-1} M \ldots \Delta = r_2 \Delta_1 = r_2 C_1 M = CM$. Auch im allgemeinen Falle wird also Δ/C ganzzahlig und

$$\text{(8''.)} \qquad \begin{aligned} C &= |AB|\, M^2 \\ \Delta &= |AB|\, M^3. \end{aligned}$$

Werden diese Werte in (11.) eingetragen, so ergibt sich beispielsweise aus (11'.):

$$\begin{aligned} \Delta a_1^0 &= -|B|\, M^2 \text{ Sign. } A(a_0' a_2'' - a_0'' a_2') \\ -\text{Sign. } A\Delta a_1' &= \quad ,, \quad ,, \quad (a_0^0 a_2'' - a_0'' a_2^0) \\ \text{Sign. } B\Delta a_1'' &= \quad ,, \quad ,, \quad (a_0^0 a_2' - a_0' a_2^0), \end{aligned}$$

---

[1]) *Bachmann, P.:* „*A*“, S. 15.

woraus

$$(10'.)\qquad \begin{aligned} &a_1^0 a_2^0 + \text{Sign. } A\, a_1' a_2' + \text{Sign. } B\, a_1'' a_2'' = 0,\\ &(a_1^0)^2 + \text{Sign. } A (a_1')^2 + \text{Sign. } B (a_1'')^2 = \text{Sign. } A|B|\, M^2, \end{aligned}$$

wie auch aus (11″.)

$$(a_2^0) + \text{Sign. } A (a_2')^2 + \text{Sign. } B (a_2'')^2 = \text{Sign. } B|A|\, M^2$$

deduziert werden können. Werden die Werte $y = a_1^0$, $y' = a_1'$ Sign. A, $y'' = a_1''$ Sign. B in (6.) eingetragen, so findet man zufolge (10.) und (10′.): $x = 0$, $x' = x_\beta = (a_1^0)^2 + \text{Sign. } A (a_1')^2 + \text{Sign. } B (a_1'')^2$, $x'' = 0$. In derselben Weise ergeben $y = a_2^0$, $y' = a_2'$ Sign. A, $y'' = a_2''$ Sign. B die Werte $x = 0$, $x' = 0$, $x'' = x_\gamma = (a_2^0)^2 + \text{Sign. } A (a_2')^2 + \text{Sign. } B (a_2'')^2 = \text{Sign. } B|A|\, M^2$. Die inverse Transformation von (6.) wird

$$(6'.)\qquad \begin{aligned} \Delta y &= x(a_1' a_2'' - a_1'' a_2') - x'(a_0' a_2'' - a_0'' a_2') + x''(a_0' a_1'' - a_0'' a_1')\\ -\Delta y' &= x(a_1^0 a_2'' - a_1'' a_2^0) - x'(a_0^0 a_2'' - a_0'' a_2^0) + x''(a_0^0 a_1'' - a_0'' a_1^0)\\ \Delta y'' &= x(a_1^0 a_2' - a_1' a_2^0) - x'(a_0^0 a_2' - a_0' a_2^0) + x''(a_0^0 a_1' - a_0' a_1^0) \end{aligned}$$

oder infolge (9.) und (11.)

$$(6''.)\qquad \begin{aligned} Cy &= a_0^0 x + A a_1^0 x' + B a_2^0 x''\\ \text{Sign. } A\, Cy' &= a_0' x + A a_1' x' + B a_2' x''\\ \text{Sign. } B\, Cy'' &= a_0'' x + A a_1'' x' + B a_2'' x'', \end{aligned}$$

an die transponierte Substitution erinnernd.

Jetzt wollen wir umgekehrt uns die Gleichungen

$$(13.)\qquad \begin{aligned} &(a_1^0)^2 + \text{Sign. } A (a_1')^2 + \text{Sign. } B (a_1'')^2 = \text{Sign. } A|B|\, M^2\\ &(a_2^0)^2 + \text{Sign. } A (a_2')^2 + \text{Sign. } B (a_2'')^2 = \text{Sign. } B|A|\, M^2\\ &a_1^0 a_2^0 + \text{Sign. } A a_1' a_2' + \text{Sign. } B a_1'' a_2'' = 0 \end{aligned}$$

geben und suchen, welche Schlüsse aus ihnen für unsere Transformation (6.) gezogen werden können. Durch Elimination von a_1^0 ergibt sich

$$\begin{aligned} (a_1')^2 \text{ Sign. } A[(a_2^0)^2 + \text{Sign. } A (a_2')^2] + (a_1'')^2 \text{ Sign. } B\,[(a_2^0)^2 + \text{Sign. } B (a_2'')^2]\\ + 2 \text{ Sign. } A \text{ Sign. } B a_1' a_1'' a_2' a_2'' = \text{Sign. } A|B|\, M^2 (a_2^0)^2, \end{aligned}$$

d. h. vermittelst (13.)

$$\begin{aligned} |A|\, M^2 [(a_1'')^2 + \text{Sign. } A \text{ Sign. } B (a_1')^2] - \text{Sign. } A \text{ Sign. } B (a_1 a_2'' - a_1'' a_2)^2\\ = \text{Sign. } A\,|B|\, M^2 (a_2^0)^2, \end{aligned}$$

woraus sofort $a_1' a_2'' - a_1'' a_2' \equiv 0 \pmod{M}$ erschlossen werden kann. In derselben Weise findet man $a_1^0 a_2'' - a_1'' a_2^0 \equiv 0$, $a_1^0 a_2' - a_1' a_2^0 \equiv 0 \pmod{M}$. Wir haben deshalb a_0^0, a_0' und a_0'' ganzzahlig aus

$$(14.)\qquad \begin{aligned} M a_0^0 &= a_1' a_2'' - a_1'' a_2'\\ -M a_0' &= (a_1^0 a_2'' - a_1'' a_2^0) \text{ Sign. } A\\ M a_0'' &= (a_1^0 a_2' - a_1' a_2^0) \text{ Sign. } B. \end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen mit a_0^0, a_0' Sign. A, a_0'' Sign. B, a_1^0, a_1' Sign. A, a_1'' Sign. B und a_2^0, a_2' Sign. A, a_2'' Sign. B respektive multipliziert und addiert, so erhält man

$$(15.)\qquad \begin{aligned} &(a_0^0)^2 + \text{Sign. } A (a_0')^2 + \text{Sign. } B (a_0'')^2 = \Delta/M = C\\ &a_0^0 a_1^0 + \text{Sign. } A a_0' a_1' + \text{Sign. } B a_0'' a_1'' = 0\\ &a_0^0 a_2^0 + \text{Sign. } A a_0' a_2' + \text{Sign. } B a_0'' a_2'' = 0. \end{aligned}$$

Auf Grund der Gleichungen (15.) und (13.) ergeben sich die Systeme

$$\begin{aligned} \Delta a_1^0 &= -\,\text{Sign. } A|B|\,M^2(a_0' a_2'' - a_0'' a_2') \\ -\,\text{Sign. } A\,\Delta a_1' &= \quad ,, \quad ,, \quad (a_0^0 a_2'' - a_0'' a_2^0) \\ \text{Sign. } B\,\Delta a_1'' &= \quad ,, \quad ,, \quad (a_0^0 a_2' - a_0' a_2^0) \end{aligned} \tag{14'.}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta a_2^0 &= \text{Sign. } B|A|\,M^2(a_0' a_1'' - a_0'' a_1') \\ -\,\text{Sign. } A\,\Delta a_2' &= \quad ,, \quad ,, \quad (a_0^0 a_1'' - a_0'' a_1^0) \\ \text{Sign. } B\,\Delta a_2'' &= \quad ,, \quad ,, \quad (a_0^0 a_1' - a_0' a_1^0), \end{aligned} \tag{14''.}$$

d. h. die Relationen (11.). Mit Hilfe der Beziehungen zwischen unserer Substitutionsdeterminante und ihrer inversen $D_1 = \Delta^2$ erhalten wir aus den Werten (14.), (14'.), (14''.) $\Delta^2 = M(\Delta/|B|\,M^2)\,(\Delta/|A|M^2)\,\Delta$, d. h. $\Delta = |AB|\,M^3$ und demnach $C = |AB|\,M^2$. Dann finden wir noch

$$\begin{aligned} M a_0^0 &= \quad a_1' a_2'' - a_1'' a_2' \\ A M a_1^0 &= -(a_0' a_2'' - a_0'' a_2') \\ B M a_2^0 &= \quad a_0' a_1'' - a_1'' a_1' \,, \end{aligned} \tag{15.}$$

d. h.

$$(a_0^0)^2 + A(a_1^0)^2 + B(a_2^0)^2 = \Delta/M = C. \tag{16.}$$

Aus dieser Gleichung (16.) können wir unmittelbar die Kongruenzen (2.) wieder ablesen, woraus zu erschließen ist, daß die Bedingungen (2.) und die Gleichungen (13.) für die Existenz einer ganzzahligen Transformation, die eine Gleichung (5.) mit sich bringt, gleichberechtigt sind. Aus (15.) und den ähnlichen Gleichungen wird leicht das ganze System (7.) wiedergewonnen.

Als Beispiel dieses Ergebnisses wollen wir die Transformationen der Form $x^2 + x'^2 - x''^2$ in sich suchen. Wir haben alsdann die Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_0^0)^2 + (a_0')^2 - (a_0'')^2 &= \quad 1 \\ (a_2^0)^2 + (a_2')^2 - (a_2'')^2 &= -1 \\ a_0^0 a_2^0 + a_0' a_2' - a_0'' a_2'' &= \quad 0 \end{aligned}$$

ganzzahlig zu befriedigen. Die zweite Gleichung wird beispielsweise durch $a_2'' - a_2' = \gamma^2 + \delta^2$, $a_2'' + a_2' = \alpha^2 + \beta^2$, d. h. $a_2'' = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$, $a_2' = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)$ und gemäß $(\gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$, $a_2^0 = \alpha\gamma + \beta\delta$, $1 = \alpha\delta - \beta\gamma$ gelöst. Die erste Gleichung $(a_0'' + a_0')(a_0'' - a_0') = (a_0^0 + 1)(a_0^0 - 1)$ hat die Lösungswerte $a_0'' = \alpha\beta + \gamma\delta$, $a_0' = \alpha\beta - \gamma\delta$, $a_0^0 = \alpha\delta + \beta\gamma$, $1 = \alpha\delta - \beta\gamma$, die dritte Gleichung befriedigend. Wir erhalten demnach a_1^0, a_1' und a_1'' aus (14'.) und damit das *Gauß*sche Schema [1]).

$$\begin{array}{lll} \alpha\delta + \beta\gamma & \alpha\beta - \gamma\delta & \alpha\beta + \gamma\delta \\ \alpha\gamma - \beta\delta & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) \\ \alpha\gamma + \beta\delta & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2), \end{array} \tag{19.}$$

wo α, β, γ und δ die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ befriedigen sollen. Wählen wir aber α, β, γ und δ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = M$, so erhalten wir die Transformationen, die

$$x^2 + x'^2 - x''^2 = M^2(y^2 + y'^2 - y''^2)$$

vermitteln.

---

[1]) *Bachmann, P.:* „*A*“, S. 102.

Von besonderem Interesse ist die Tatsache, daß infolge der Ergebnisse von *Gauß* [2]), wie nach seiner Methode im Falle einer indefiniten Form direkt und im Falle einer definiten Form fast unmittelbar hervorgeht, stets Systeme (13.) mit $M^2 = 1$ existieren müssen, was besondere Verwendung findet, wenn wir explizite Ausdrücke der Substitutionen (6.) aufstellen wollen. Die Sache wird am besten mit einem einfachen Zahlenbeispiele erläutert. Wir suchen also Zahlenwerte, die das System (13.) befriedigen. Anfangs haben wir beispielsweise

$$(20'.) \qquad a^2 + \text{Sign. } Ab^2 + \text{Sign. } Bc^2 = \text{Sign. } A|B|\,M^2$$

durch ganzzahlige Werte a, b und c gelöst, und wollen x, y und z aus

$$(20''.) \qquad \begin{aligned} ax + \text{Sign. } A\,by + \text{Sign. } B\,cz &= 0 \\ x^2 + \text{Sign. } A\,y^2 + \text{Sign. } B\,z^2 &= \text{Sign. } B|A|\,M^2 \end{aligned}$$

bestimmen. Die Elimination von x gibt

$$(b^2 + \text{Sign. } Aa^2)\; y^2 + 2\,\text{Sign. } A\,\text{Sign. } B\,bcyz + z^2(c^2 + \text{Sign. } B\,a^2) = \text{Sign. } B|A|\,M^2a^2,$$

d. h.

$$[(b^2 + \text{Sign. } A\,a^2)\,y + \text{Sign. } A\,\text{Sign. } B\,bcz]^2$$
$$+ \text{Sign. } A\,\text{Sign. } Bz^2a^2(a^2 + \text{Sign. } Ab^2 + \text{Sign. } Bc^2) = \text{Sign. } B|A|M^2a^2(b^2 + \text{Sign. } A\,a^2).$$

Wir können deshalb r ganzzahlig aus

$$(22.) \qquad (b^2 + \text{Sign. } A\,a^2)\,y + \text{Sign. } A\,\text{Sign. } B\,bcz = \text{Sign. } A\,\text{Sign. } B\,Mar$$

berechnen, und mithin ist

$$(23.) \qquad r^2 + Bz^2 = \text{Sign. } BA(a^2 + \text{Sign. } A\,b^2),$$

d. h.

$$(23'.) \qquad r^2 + Bz^2 + Ac^2 = \text{Sign. } B|A|\,M^2.$$

Nach unseren früheren Bezeichnungen werden $a = a_1^0$, $b = a_1'$, $c = a_1''$ und $x = a_2^0$, $y = a_2'$, $z = a_2''$ (21.), d. h. infolge (21.) und (7.) $r = a_0''$. Aus (22.) kommt mit Hilfe von $bz - cy = a_1'a_2'' - a_1''a_2' = Ma_0^0$ die uns schon bekannte Relation $a_1^0a_0'' - a_0^0a_1''$ $= \text{Sign. } A\,BMa_2'$. Wir können aus diesen Tatsachen schließen, daß Gleichung (23.) für passend gewählte a, b und c stets in ganzen Zahlen r und z so lösbar wird, daß y in (22.) auch ganzzahlig ausfällt, wonach die übrigen Elemente a_i^k leicht berechnet werden können. Wir können übrigens die Möglichkeit von (23.) in folgender Weise bestätigen. Unserer Annahme nach gilt erstens

$$(24'.) \qquad \left(\frac{-A}{B_i}\right) = +1,$$

zweitens

$$(24''.) \qquad \left(\frac{-\text{Sign. } B\,(a^2 + \text{Sign. } Ab^2)}{B_i}\right) = +1,$$

d. h. in der Tat

$$(24'''.) \qquad \left(\frac{A\,\text{Sign. } B\,(a^2 + \text{Sign. } Ab^2)}{B_i}\right) = +1$$

für jeden Primteiler B_i in B. Die Gleichung (23.) sagt jedoch noch mehr aus. Denn in jedem Falle, wo (2.) gültig sind, muß B wie in (20'.) zerlegt werden können, d. h. es muß in (23.) die Zahl A Sign. B $(a^2 + \text{Sign. } A\,b^2)$ selbst für wenigstens eine Kombination a, b und c stets in der Form $x^2 + By^2$ darstellbar sein.

---

[1]) *Bachmann, P.*: „*A*“, S. 202 ff. vor allem S. 206.

Beispiel.

(25.) $$\chi(x, x', x'') = x^2 + 6x'^2 + 14x''^2.$$

Gemäß $2^2 + 14 \equiv 0 \pmod 3$, $1^2 + 6 \equiv 0 \pmod 7$, $1^2 + 21 \equiv 0 \pmod 2$ muß ein System (13.) für jedes M existieren. Wir berechnen $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ und demnach vermöge (23.) $r^2 + 6z^2 = 14 \cdot 2$, d. h. $z = 2$, $r = \pm 2$. Infolge (22.) ergibt sich $2y + 2z = \pm 2$, und damit die beiden Lösungssysteme

$$\begin{matrix} 2, & 1, & 1 \\ 2, & -3, & -1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 2, & 1, & 1 \\ 2, & -1, & -3, \end{matrix}$$

die in diesem Falle nicht verschieden sind. Wählen wir beispielsweise $a_1^0 = 3$, $a_1' = 1$, $a_1'' = -2$, $a_2^0 = 1$, $a_2' = 1$, $a_2'' = 2$, so finden wir vermittelst (14.): $a_0^0 = 4$, $a_0' = -8$, $a_0'' = 2 = r$. Die Transformation

$$\begin{aligned} x &= 4y - 8y' + 2y'' \\ x' &= 3y + 1y' - 2y'' \\ x'' &= 1y + 1y' + 2y'' \end{aligned}$$

bewirkt also die Gleichung

$$x^2 + 6x'^2 + 14x''^2 = 84(y^2 + y'^2 + y''^2).$$

Durch Umstellen der Elemente a_i^k und durch Zeichenvertauschung können wir noch 23 Transformationen gewinnen. Wählen wir weiter beispielsweise $M = 3$, so finden wir $9 \cdot 6 = 3^2 + 3^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 7^2 = 2^2 + 5^2 + 5^2$. Die erste Auflösung bringt nichts Neues; die zweite gibt $r^2 + 6z^2 = (1^2 + 2^2) \cdot 14$, d. h. $z = 1$, $r = \pm 8$ und $z = 3$, $r = \pm 4$. Die Gleichung $5y + 14z = \pm 24$ wird durch die Werte $z = 1$, $y = 2$ gelöst und $5y + 14z = \pm 12$ vermittelst $z = 3$, $y = -6$, woraus die beiden Lösungsysteme

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 7 \\ -11, & 2, & 1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 1, & 2, & 7 \\ -9, & -6, & 3 \end{matrix}$$

hervorgehen, aus denen die drei übrigen Elemente leicht berechnet werden können. Für $2^2 + 5^2 + 5^2 = 9 \cdot 6$ erhalten wir $r^2 + 6z^2 = 14(2^2 + 5^2)$ mit den Lösungswerten $z = 1$, $r = \pm 20$ und $z = 5$, $r = \pm 16$. Infolge (22.) haben wir also $29y + 25z = \pm 120$, d. h. $z = 1$, $y = -5$, und $29y + 25z = \pm 96$, d. h. $z = 5$, $y = -1$, das einzige Lösungsystem

$$\begin{matrix} 1, & -5, & 10 \\ 5, & 5, & 2 \end{matrix}$$

ergebend.

Die allgemeine, ternäre Form

$$f(x, x', x'') = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$
$$= \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

mit der Adjungierten

$$\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B'', & B'' \end{pmatrix}$$

geht nach einfacher Umformung [1]) in

---

[1]) *Bachmann, P.:* „*A*“, S. 11

$$aA'f(x, x', x'') = A'\xi^2 + \eta^2 + Da\zeta^2 \tag{32.}$$

vermöge der Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= ax + b'x'' + b''x' \\ \eta &= 0x + A'x'' - B\,x' \\ \zeta &= 0x + 0\;x'' + 1\;x' \end{aligned}$$

über. Diese Gleichung (32.) wird leicht in

$$aA'f(x, x', x'') = R^2(\Delta_1'\tau^2 + \tau'^2 + \Delta_1\tau''^2)$$

übergeführt, wo $A' = n_1^2\Delta_1'$, $aD = n_2^2\Delta_1$ sind, und Δ_1' und Δ_1 ohne quadratische Teiler sind. Wir setzen noch

$$\begin{aligned} \Delta_1' &= s\Delta_2' \\ \Delta_1 &= s\Delta_2, \end{aligned} \tag{33.}$$

Δ_2' und Δ_2 relativ prim, und erhalten gemäß (32.) $m_1^2 + Da \equiv 0 \pmod{\Delta_2'}$. Auf Grund $aa'' - b'^2 = A$ [1]) wird $b'^2 + A \equiv 0 \pmod{a_i}$ für jeden Primteiler a_i in a. Geben wir uns dazu die beiden Kongruenzen

$$\begin{cases} (34'.) & m_2^2 + \Delta_1' \equiv 0 \pmod{\Delta_2} \\ (34''.) & m_3^2 + \Delta_2'\Delta_2 \equiv 0 \pmod{s}, \end{cases} \tag{34.}$$

so sind alle Bedingungen einer Transformation (5.) erfüllt. Nachdem dies festgestellt worden ist, wollen wir die ganzzahligen Transformationen, die

$$f(x, x', x'') = \text{Sign. } (aA')\,|D|M^2(y^2 + \text{Sign. } A'y'^2 + \text{Sign. } (Da)y''^2) \tag{35.}$$

bewirken, direkt untersuchen. Nach einfacher Überlegung geht aus (35.) die Tatsache hervor, daß im Falle einer definiten Form die Transformation

$$\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = DM^2 \begin{pmatrix} 1, 1, 1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix} \tag{36'.}$$

und im Falle einer indefiniten

$$\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = DM^2 \begin{pmatrix} 1, -1, -1 \\ 0, \;\; 0, \;\; 0 \end{pmatrix} \tag{36''.}$$

stets ausführbar wird. Der Modul der Transformation ist $DM^3 (D \gtrless 0)$. Ob auch jetzt in jedem Falle Systeme mit $M^2 = 1$ existieren, bleibt wenigstens diesmal unbeantwortet. Doch kann im Falle einer indefiniten Form durch eine einfache Kombination mit Transformationen (19.) stets erreicht werden, daß in jenen Formeln α, β, γ und δ solche Werte zuerteilt werden, daß alle ungeraden Primfaktoren in M sukzessive ausgeschieden werden. Die Einzelheiten werden aber hier übergangen. Sei nun die Transformation (36''.) vermittelst

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0^0 y + \alpha_0' y' + \alpha_0'' y'' \\ x' &= \alpha_1^0 y + \alpha_1' y' + \alpha_1'' y'' \\ x'' &= \alpha_2^0 y + \alpha_2' y' + \alpha_2'' y'' \end{aligned} \tag{37.}$$

bewirkt [2]). Dann haben wir die Bedingungsgleichungen

---

[1]) *Bachmann, P.:* „*A*“, S. 8.

[2]) *Bachmann, P.:* „*A*“, S. 14 ff.

$$
\begin{aligned}
f_0^0\alpha_0^0 + f_0'\alpha_1^0 + f_0^2\alpha_2^0 &= \quad DM^2\\
f_1^0\alpha_0' + f_1'\alpha_1' + f_1^2\alpha_2' &= -DM^2\\
f_2^0\alpha_0'' + f_2'\alpha_1'' + f_2^2\alpha_2'' &= -DM^2\\
f_1^0\alpha_0'' + f_1'\alpha_1'' + f_1^2\alpha_2'' &= f_2^0\alpha_0' + f_2'\alpha_1' + f_2^2\alpha_2' = 0\\
f_2^0\alpha_0^0 + f_2'\alpha_1^0 + f_2^2\alpha_2^0 &= f_0^0\alpha_0'' + f_0'\alpha_1'' + f_0^2\alpha_2'' = 0\\
f_0^0\alpha_0' + f_0'\alpha_1' + f_0^2\alpha_2' &= f_1^0\alpha_0^0 + f_1'\alpha_1^0 + f_1^2\alpha_2^0 = 0
\end{aligned}
\tag{38.}
$$

$$\Delta = DM_3,$$

wo Δ den Modulus der Transformation bedeutet. Aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
f_0^0\alpha_0^0 + f_0'\alpha_1^0 + f_0^2\alpha_2^0 &= DM^2\\
f_0^0\alpha_0' + f_0'\alpha_1' + f_0^2\alpha_2' &= 0\\
f_0^0\alpha_0'' + f_0'\alpha_1'' + f_0^2\alpha_2'' &= 0,
\end{aligned}
\tag{39'.}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
f_0^0 &= a\ \alpha_0^0 + b''\alpha_1^0 + b'\ \alpha_2^0\\
f_0' &= b''\alpha_0^0 + a'\ \alpha_1^0 + b\ \alpha_2^0\\
f_0^2 &= b'\ \alpha_0^0 + b\ \alpha_1^0 + a''\alpha_2^0
\end{aligned}
\tag{39''.}
$$

bedeutet, berechnen wir

$$
\begin{aligned}
Mf_0^0 &= \quad \alpha_0'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2'\\
Mf_0' &= -\alpha_0'\alpha_2'' + \alpha_0''\alpha_2'\\
Mf_0^2 &= \quad \alpha_0'\alpha_1'' - \alpha_0''\alpha_1'
\end{aligned}
\tag{40.}
$$

und danach gemäß (39''.) und auf Grund (40.):

$$
\begin{aligned}
\alpha_0^0\,MD &= A\ (\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2') - B''(\alpha_0'\alpha_2'' - \alpha_0''\alpha_2') + B'\ (\alpha_0'\alpha_1'' - \alpha_0''\alpha_1')\\
\alpha_1^0\,MD &= B''(\ ,,\ -\ ,,\ ) - A'\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) + B\ (\ ,,\ -\ ,,\ )\\
\alpha_2^0\,MD &= B'\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) - B\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) + A''(\ ,,\ -\ ,,\ ).
\end{aligned}
\tag{41'.}
$$

Ebenso haben wir

$$
\begin{aligned}
\alpha_0'\,MD &= A\ (\alpha_1^0\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2^0) - B''(\alpha_0^0\alpha_2'' - \alpha_2^0\alpha_0'') + B'\ (\alpha_0^0\alpha_1'' - \alpha_0''\alpha_1^0)\\
\alpha_1'\,MD &= B''(\ ,,\ -\ ,,\ ) - A'\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) + B\ (\ ,,\ -\ ,,\ )\\
\alpha_2'\,MD &= B'\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) - B\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) + A''(\ ,,\ -\ ,,\ )
\end{aligned}
\tag{41''.}
$$

und

$$
\begin{aligned}
-\alpha_0''\,MD &= A\ (\alpha_1^0\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2^0) - B''(\alpha_0^0\alpha_2' - \alpha_0'\alpha_2^0) + B'\ (\alpha_0^0\alpha_1' - \alpha_1^0\alpha_1')\\
-\alpha_1''\,MD &= B''(\ ,,\ -\ ,,\ ) - A'\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) + B\ (\ ,,\ -\ ,,\ )\\
-\alpha''\,MD &= B'\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) - B\ (\ ,,\ -\ ,,\ ) + A''(\ ,,\ -\ ,,\ ).
\end{aligned}
\tag{41'''.}
$$

Nach Multiplikation der ersten, zweiten und dritten Gleichungen (41'.), (41''.), (41'''.) mit $\alpha_0^0, -\alpha_0', \alpha_0''$ usw. und Addieren ergibt sich folgendes System:

$$
\begin{aligned}
(\alpha_0^0)^2 - (\alpha_0')^2 - (\alpha_0'')^2 &= A\ M^2\\
(\alpha_1^0)^2 - (\alpha_1')^2 - (\alpha_1'')^2 &= A'\,M^2\\
(\alpha_2^0)^2 - (\alpha_2')^2 - (\alpha_2'')^2 &= A''M^2\\
\alpha_1^0\alpha_2^0 - \alpha_1'\alpha_2' - \alpha_1''\alpha_2'' &= B\ M^2\\
\alpha_0^0\alpha_2^0 - \alpha_0'\alpha_2' - \alpha_0''\alpha_2'' &= B'\,M^2\\
\alpha_0^0\alpha_1^0 - \alpha_0'\alpha_1' - \alpha_0''\alpha_1'' &= B''M^2.
\end{aligned}
\tag{42.}
$$

Aus diesen Gleichungen [1]), wie auch direkt, werden

$$
\begin{aligned}
DaM^4 &= (\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2')^2 - (\alpha_1^0\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2^0)^2 - (\alpha_1^0\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2^0)^2\\
DaM^4 &= (\alpha_0'\alpha_2'' - \alpha_2'\alpha_0'')^2 - (\alpha_0^0\alpha_2'' - \alpha_2^0\alpha_0'')^2 - (\alpha^0\alpha_2' - \alpha_0'\alpha_2^0)^2
\end{aligned}
$$

usw.

---

[1]) *Bachmann, P.:* „*A*“, S. 10, Formel (17.).

gewonnen. Umgekehrt kann das ganze System (38.) aus (42.) wieder erhalten werden. Infolge

$$f(a_0^0, a_1^0, a_2^0) = DM^2$$

kommt die Relation

$$aA'f(a_0^0, a_1^0, a_2^0) = aA'DM^2 = A'(aa_0^0 + b''a_1^0 + b'a_1^0)^2 + (A'a_2^0 - Ba_1^0) + Da(a_1^0)^2,$$

woraus die Bedingungen (34.) wiedergefunden werden. Auch in diesem allgemeinen Falle läßt sich zeigen, daß es die Elemente a_1^0, a_1', a_1'', a_2^0, a_2' und a_2'' so zu bestimmen genügt, daß sie die Relationen

$$\begin{aligned} (a_1^0)^2 - (a_1')^2 - (a_1'')^2 &= A' M^2 \\ (a_2^0)^2 - (a_2')^2 - (a_2'')^2 &= A'' M^2 \\ (a_1^0 a_2^0) - (a_1' a_2') - (a_1'' a_2'') &= B\ M^2 \end{aligned} \tag{43.}$$

befriedigen, um aus ihnen a_0^0, a_0', a_0'' eindeutig zu berechnen. Wir haben nämlich oben gefunden

$$\begin{aligned} +a_0^0 MD &= A(a_1'a_2'' - a_1''a_2') - B''(a_0'a_2'' - a_0''a_2') + B'(a_0'a_1'' - a_0''a_1') \\ +a_0' MD &= A(a_1^0 a_2'' - a_1''a_2^0) - B''(a_0^0 a_2'' - a_0''a_2^0) + B'(a_0^0 a_1'' - a_0''a_1^0) \\ -a_0'' MD &= A(a_1^0 a_2' - a_1' a_2^0) - B''(a_0^0 a_2' - a_0' a_2^0) + B'(a_0^0 a_1' - a_1^0 a_0'), \end{aligned}$$

oder nach a_0^0, a_0', a_0'' als Variablen geschrieben

$$\begin{aligned} a_0^0 MD \quad &+ a_0'(B''a_2'' - B'a_1'') - a_0''(B''a_2' - B'a_1') = A(a_1'a_2'' - a_1''a_2') \\ a_0^0(B''a_2'' - B'a_1'') + \quad &a_0' MD \quad - a_0''(B''a_2^0 - B'a_1^0) = A(a_1^0 a_2'' - a_1''a_2^0) \\ a_0^0(B''a_2' - B'a_1') - a_0'(B''a_2^0 - B'a_1^0) - \quad &a_0'' DM \quad = A(a_1^0 a_2' - a_1' a_2^0). \end{aligned} \tag{44.}$$

Nach a_0^0 gelöst ergibt sich eine Gleichung der Form

$$a_0^0 \text{ Det. } 1 = A \text{ Det. } 2. \tag{45}$$

Hier wird die erste Determinante in folgender Weise berechnet:

$$\begin{aligned} \text{Det. } 1 = DM[&- D^2M^2 - (B''a_2^0 - B'a_1^0)^2] - (B''a_2'' - B'a_1'') \\ [&- DM(B''a_2'' - B'a_1'') - (B''a_2' - B'a_1')(B''a_2^0 - B'a_1^0)] + (B''a_2' - B'a_1'') \\ [&- (B''a_2'' - B'a_1'')(B''a_2^0 - B'a_1^0) + MD(B''a_2' - B'a_1')] = - D^3M^3 + DM \\ [&- (B''a_2^0 - B'a_1^0)^2 + (B''a_2'' - B'a_1'')^2 + (B''a_2' - B'a_1')^2] = - D^3M^3 + DM^3 \\ [&- B''^2A'' - B'^2A + 2BB'B'']^1) = DM^3[- D^2 - B''^2A'' - B'^2A' + 2BB'B''] \\ &= ADM^3[B^2 - A'A''] = - aAD^2M^3, \end{aligned} \tag{46'.}$$

und nach einer ähnlichen Rechnung

$$\begin{aligned} \text{Det. } 2 = (a_1'a_2'' - a_1''a_2')[&- D^2M^2 - (B''a_2^0 - B'a_1^0)^2] - (a_1^0 a_2'' - a_1''a_2^0) \\ [(- DM)(B''a_2'' - B'a_1'') - (B''a_2^0 - B'a_1^0)(B''a_2' - B'a_1')] &+ (a_1^0 a_2' - a_1' a_2^0) \\ [- (B''a_2'' - B'a_1'')(B''a_2^0 - B'a_1^0) &+ MD(B''a_2' - B'a_1')] \\ = - D^2M^2(a_1'a_2'' - a_1''a_2') + DM^3B''(- A''a_1^0 + Ba_2^0) &+ DM^3B'(- A'a_2^0 + Ba_1^0). \end{aligned} \tag{46''.}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} - a_0^0 aAD^2M^3 = - AD^2M^2(a_1'a_2'' - a_1''a_2') &+ DAM^3[a_1^0(- B''A'' + BB') \\ &+ a_2^0(BB'' - B'A'), \end{aligned}$$

d. h. endgültig

$$a_0^0 aM = (a_1'a_2'' - a_2''a_2') - M(b''\ a_1^0 + b'a_2^0). \tag{47.}$$

Wir werden jetzt zeigen, daß $(a_1'a_2'' - a_1''a_2')$ immer durch M teilbar sein muß. Wir haben nämlich

---

[1]) *Bachmann, P.:* „*A*", S. 8.

$$(a_1^0)^2 = A'\,M^2 + [(a_1')^2 + (a_1'')^2]$$
$$(a_2^0)^2 = A''M^2 + [(a_2')^2 + (a_2'')^2]$$
$$(a_1^0 a_2^0)^2 = B^2M^4 + 2BM^2(a_1'a_2' + a_1''a_2'') + (a_1'a_2' + a_1''a_2'')^2,$$

daher

$$A'A''M^4 + A''M^2\,[-A'M^2 + (a_1^0)^2] + A'M^2[-A''M^2 + (a_2^0)^2]$$
$$+ [(a_1')^2 + (a_1'')^2][(a_2')^2 + (a_2')^2] = B^2M^4 + 2BM^2(a_1^0a_2^0 - BM^2) + (a_1'a_2' + a_1''a_2'')^2,$$

also

$$(a_1'a_2'' - a_1''a_2')^2 = M^2a[DM^2 - a'(a_1^0)^2 - a''(a_2^0)^2 - 2ba_1^0a_2^0] + M^2(b''a_1^0 + b'a_2^0)^2.$$

Aus dieser Formel folgern wir, daß $(a_1'a_2'' - a_1''a_2')$ stets durch M teilbar werden muß, und dazu, daß auch $(a_1'a_2'' - a_1^0a_2')^2 - M^2(b''a_1^0 + b'a_2^0)^2$ durch a teilbar wird. Durch eine Transformation $x = z$, $x' = az'$, $x'' = az''$ erreichen wir aber immer

$$f(x, x', x'') = a^2f_1(z, z', z''),$$

wo jetzt der Koeffizient von z gleich 1 wird.
Beispiel:

$$f(x, x', x'') = \begin{pmatrix} 3, & 7, & 8 \\ -6, & -1, & -2 \end{pmatrix}. \qquad D = -3.$$

Die Adjungierte wird

$$\begin{pmatrix} 20, & 23, & 17 \\ 20, & 19, & 22, \end{pmatrix},$$

und wir haben beispielsweise:

$$6^2 - 3^2 - 2^2 = 23 \cdot 1^2$$
$$5^2 - 2^2 - 2^2 = 17 \cdot 1^2$$
$$6 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 20 \cdot 1^2$$

mit $M^2 = 1$. Für $M = -1$ berechnen wir $-a_0^0 \cdot 3 \cdot 1 = (6 - 4) + 1(-2 \cdot 6 - 1 \cdot 5)$, $a_0^0 = 5$. Aus ähnlichen Formeln ergibt sich $-a_0' \cdot 3 \cdot 1 = (12 - 10) + 1(-2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)$, $a_0' = 2$, und $-a_0'' \cdot 3 \cdot 1 = (15 - 12) + 1(-2 \cdot 2 - 1 \cdot 2)$, $a_0'' = 1$. Wir bestätigen auch leicht, daß die Transformation

$$\begin{pmatrix} 5, & 2, & 1 \\ 6, & 3, & 2 \\ 5, & 2, & 2 \end{pmatrix}$$

in der Tat den Übergang

(48.) $$f(x, x', x'') = \begin{pmatrix} 3, & 7, & 8 \\ -6, & -1, & -2 \end{pmatrix} = -3f(y, y', y'') = -3\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

bewirkt. In derselben Weise gibt das Transformationsschema

$$\begin{pmatrix} 9, & 6, & 5 \\ 8, & 5, & 4 \\ 7, & 4, & 4 \end{pmatrix}$$

eine Gleichung (48.) mit $M = +1$.

Zur Theorie des *Malfatti*schen Problems.

Von Herrn *Bernhard von Ludwig* in Berlin.

Mit 3 Figuren.

Die historischen Berichte über die Entstehung der *rein geometrischen* Theorie des *Malfatti*schen Problems gipfeln zumeist in der Angabe, daß die vor nahezu 100 Jahren im ersten Bande dieser Zeitschrift von *Steiner* beweislos mitgeteilte Lösung durch die Arbeiten von *H. Schröter* (1874, Crelle J. Bd. 77) und *J. Petersen* (1879, „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben") als richtig erwiesen worden sei. Eine genauere Prüfung dieser Arbeiten zeigt indessen, daß dies keineswegs der Fall ist, indem sie der Hauptsache nach nur in der Herleitung des folgenden Satzes bestehen: Jede gemeinsame Tangente in einem Berührungspunkte von zweien der durch die *Malfatti*sche Aufgabe [1]) geforderten Kreise tangiert zugleich zwei Berührungskreise der Dreiecke, in welche das gegebene Dreieck durch die Halbierungslinien der Winkel geteilt wird. Wäre dabei, was nicht der Fall ist, noch bewiesen worden, daß diese Berührungskreise gerade die *Inkreise* der betreffenden Dreiecke sein müssen, so hätte man im Sinne von *Steiner* hiermit offenbar genau das geleistet, was als die „Analysis" einer geometrischen Aufgabe bezeichnet zu werden pflegt, d. h. es wäre gezeigt worden, daß eine andere als die von *Steiner* mitgeteilte Lösung nicht möglich ist; ob es aber überhaupt eine Konstruktion gibt, die zum Ziele führt, wäre damit auch nicht im entferntesten ausgemacht, und im Gegensatz zu vielen anderen Aufgaben, bei denen in der Tat mit der Analysis auch alles übrige so gut wie erledigt, weil ohne weiteres daraus deduzierbar ist, weist die Theorie des *Malfatti*schen Problems in Ermangelung eines wirklich vollständigen, einfachen, rein geometrischen Beweises für die Richtigkeit der *Steiner*schen Lösung hier eine wesentliche Lücke auf, die ich durch vorstehende Arbeit ausfüllen zu können hoffe.

Anstatt auf das erwähnte Theorem werden wir uns dabei auf einen, dasselbe noch genauer präzisierenden Hilfssatz stützen, für den sich ein überraschend einfacher Beweis in den „Geometrischen Konstruktionsaufgaben" von *H. Lieber*

---

[1]) Zur Vermeidung der mehrdeutigen Lösbarkeit beschränken wir uns hier, wie dies auch *Schröter* und *Petersen* getan haben, auf die ursprüngliche Form der Aufgabe, wonach die *Malfatti*schen Kreise die Dreieckseiten selbst und nicht ihre Verlängerungen berühren sollen. Nach vollständiger Erledigung dieses Falles sind ja auch die übrigen 31 Fälle leicht in analoger Weise rein geometrisch zu behandeln.

und *F. v. Lühmann* (Berlin, 12. Aufl. 1903, S. 110, 111) findet. Da jedoch die dort gegebene Formulierung des Satzes für unsere Zwecke nicht detailliert genug und seine Herleitung nicht fehlerfrei und vollständig sind, ist es leider unvermeidlich, auf diese Entwickelung näher einzugehen:

Indem wir, da Mißverständnisse hier nicht möglich sind, für die Mittelpunkte von Kreisen dieselbe Bezeichnung verwenden wie für die Kreise selbst, geben wir dem Hilfssatz die folgende Fassung:

Drei Kreise M_1, M_2, M_3 mögen sich paarweise ausschließend berühren: M_2, M_3 in P_1 mit der gemeinsamen inneren Tangente t_1; M_3, M_1 in P_2 mit der gemeinsamen inneren Tangente t_2; M_1, M_2 in P_3 mit der gemeinsamen inneren Tangente t_3. An M_1, M_2 legen wir diejenige gemeinsame äußere Tangente, deren Berührungspunkte G_1, G_2 durch die Zentrale M_1M_2 vom Mittelpunkte M_3 getrennt werden, desgleichen an M_1, M_3 diejenige gemeinsame äußere Tangente, deren Berührungspunkte K_1, K_3 durch die Zentrale M_1M_3 vom Mittelpunkt M_2 getrennt werden und setzen jetzt voraus, daß diese sich in P schneidenden Geraden G_1G_2 und K_1K_3 einen gleichfalls mit P bezeichneten, nicht konvexen Winkelraum bilden, in welchem die drei Kreise ganz enthalten sind. Sind dann G''', K'' die Mittelpunkte der Strecken G_1G_2 und K_1K_3, in welchen diese bezw. von t_3, t_2 als den Potenzlinien der Kreispaare M_1, M_2 und M_1, M_3 getroffen werden, so konstruieren wir einen Kreis G, welcher die Gerade PG''' in G''' auf der dem Inneren des Winkelraumes P zugekehrten Seite, sowie die Winkelhalbierende PM_1 berührt und einen Kreis K, der in analoger Weise durch PK'', K'' und PM_1 als Berührungskreis eindeutig bestimmt ist. Dann ist, so wird behauptet, t_1 eine gemeinsame innere Tangente von G und K; t_2 eine gemeinsame äußere Tangente von M_1 und G; t_3 eine gemeinsame äußere Tangente von M_1 und K.

Beweis: Als Potenzlinien schneiden sich t_1, t_2, t_3 in einem Punkte J, dem Potenzzentrum der drei Kreise M_1, M_2, M_3. Wegen der dort gleichen Potenzen dieser Kreise muß also $JP_1 = JP_2 = JP_3$ sein, so daß der mit dieser Strecke als Radius um J geschlagene Kreis die Seiten des $\Delta M_1M_2M_3$ in P_1, P_2, P_3, also in inneren Punkten berührt; folglich ist J der Mittelpunkt des Inkreises dieses Dreiecks.

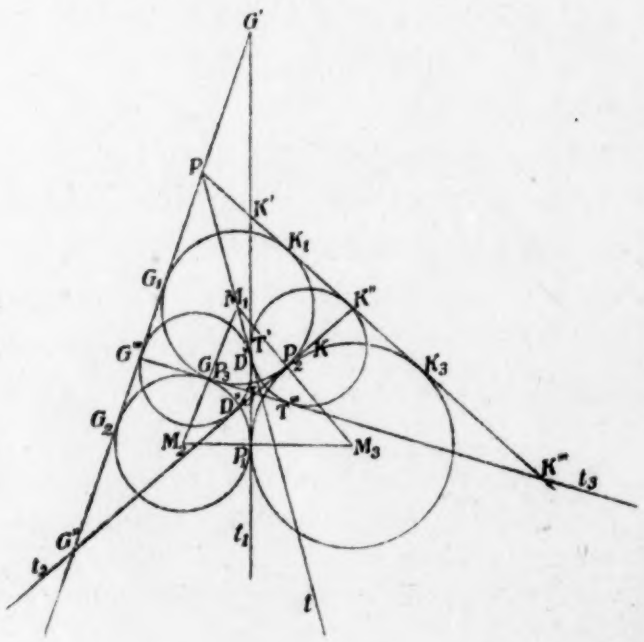


Fig. 1.

Setzt man noch $G' = (PG''', t_1)$, $K' = (PK'', t_1)$, $G'' = (PG''', t_2)$, $K''' = (PK'', t_3)$, so stehen, weil der soeben ermittelten Lage von J zufolge z. B. P_3 auf der Geraden t_3 notwendig zwischen J und G''' liegen muß, die Kreise M_1, M_2 bezw. zu den Dreiecken $JG''G'''$ und $JG'G'''$ ein Verhältnis des Inkreises oder des zur Seite JG''' gehörigen Ankreises, so daß sich

$$\begin{cases} G'''P_3 - P_3J = \pm (G''G''' - G''J) \\ G'''P_3 - P_3J = \pm (G'G''' - G'J) \end{cases}$$

mit vier Kombinationen der Vorzeichen ergeben kann, wobei einer dieser Fälle eintreten muß. Dies führt offenbar zu den beiden Möglichkeiten

$$G''G''' - G'G''' = G''J - G'J$$

und

$$G''G''' + G'G''' = G''J + G'J,$$

die nur statthaben können, je nachdem G', G'' durch G''' getrennt werden, oder nicht; und hieraus folgt sofort für das $\Delta JG'G''$, daß entweder der Inkreis, oder der zu einer der Seiten JG', JG'' gehörige Ankreis desselben die Gerade $G'G''$ im Punkte G''' berührt. Unter allen Umständen wird also hierdurch ein ganz bestimmter Berührungskreis des aus den Geraden PG''', t_1, t_2 gebildeten Dreiecks $JG'G''$, den wir G nennen wollen derart festgelegt, daß er die Gerade PG''' im Punkte G''' auf der dem Inneren des Winkelraumes P zugekehrten Seite berührt, da ja J als Inkreismittelpunkt des $\Delta M_1M_2M_3$ ein innerer Punkt dieses Raumes ist.

Versteht man unter den Winkeln P_2JP_3 und P_1JP_3 speziell diejenigen Winkelräume, in deren Inneren bezw. die Punkte M_1, M_2 liegen, so folgt aus

$$\begin{cases} \sphericalangle P_2JP_3 = \pi - \sphericalangle M_2M_1M_3 < \pi \\ \sphericalangle P_1JP_3 = \pi - \sphericalangle M_1M_2M_3 < \pi \end{cases},$$

daß P_3 und folglich auch G''' sowohl auf der dem Punkte M_1 zugekehrten Seite von JP_2, d. h. von t_2, als auch auf der dem Punkte M_2 zugekehrten Seite von JP_1, d. h. von t_1 liegen. Da nun G''' ein Punkt des Kreises G und t_1, t_2 dessen Tangenten sind, so liegt der ganze Kreis G auf den angegebenen Seiten von t_2, t_1; die Kreise G und M_1 befinden sich also auf derselben, die Kreise G und M_3 also auf entgegengesetzten Seiten von t_2, und ebenso die Kreise G und M_2 auf derselben, also G und M_3 auf entgegengesetzten Seiten von t_1. Sind demnach D', D'' die Punkte, in welchen G bezw. von t_1 und t_2 berührt wird, so ist z. B. t_2, d. h. P_2D'' sowohl gemeinsam äußere Tangente von G und M_1 als auch, ebenso wie t_1, d. h. P_1D' gemeinsame innere Tangente von G und M_3. so daß sich unmittelbar

(1.) $$G_1G''' = P_2D'' = P_1D'$$

ergibt. Vollkommen analoge Resultate erhalten wir natürlich, wenn wir von dem anderen Schenkel des Winkelraumes P ausgehen, so daß, wenn man den diesen Schenkel in K'' auf der inneren Seite berührenden und dem Kreise G entsprechenden Kreis mit K und die Punkte, in denen er von t_1, t_3 berührt wird mit T', T'''' bezeichnet, den Gleichungen (1.) sofort die Gleichungen

(2.) $$K_1K'' = P_3T''' = P_1\,T'$$

an die Seite gestellt werden können.

Ebenso wie t_2 eine gemeinsame äußere Tangente von G und M_1, ist also t_3 eine gemeinsame äußere Tangente von K und M_1, während sich t_1 als gemeinsame innere Tangente von G und K ergibt, denn analog wie G und M_2 liegen K und M_3 auf je derselben Seite von t_1, also G und K selbst auf verschiedenen Seiten dieser Geraden.

Es bleibt also nur noch übrig zu zeigen, daß auch die Winkelhalbierende PM_1 eine gemeinsame innere Tangente von G und K ist, denn dann sind diese Kreise offenbar mit den in unserer Behauptung ebenso genannten Kreisen identisch und entsprechen allen Aussagen des Hilfssatzes.

Betrachten wir die drei auf t_1 gelegenen Punkte P_1, J, D' und den von t_2 und PG'' als den gemeinsamen äußeren Tangenten von G und M_1 gebildeten und diese Kreise enthaltenden Winkelraum, so liegen P_1 als Punkt des Kreises M_3 außerhalb, D' als Punkt des Kreises G innerhalb dieses Raumes, während sich J auf der Grenze desselben befindet. P_1 und D' werden also durch J getrennt, was in analoger Weise natürlich auch für P_1 und T' folgt. Es liegen also D' und T' auf derselben Seite von P_1, so daß sich $P_1T' - P_1D' = \pm D'T'$ ergibt. Nun folgt aber aus (1.) und (2.)

$$PK'' - PG''' = PK_1 \pm K_1K'' - (PG_1 \pm G_1G''') = \pm (K_1K'' - G_1G''') = \pm (P_1T' - P_1D'),$$

wo die oberen, oder unteren Vorzeichen gelten, je nachdem M_2, M_3 diesseits des Kreises M_1, wie in Fig. 1 dargestellt, oder jenseits desselben im innersten Teile des Winkelraumes P liegen. Unter allen Umständen ist also

$$PK'' - PG''' = \pm D'T'. \tag{3.}$$

Je nachdem der eine, oder der andere der beiden soeben angegebenen Fälle vorliegt, ist $PG_1 \gtrless PG'''$. Liegt also G'' diesseits von P und nicht auf der Verlängerung von PG''' über P hinaus, so folgt

$$G''G_1 = \pm (PG'' - PG_1) > \pm (PG'' - PG''') = G''G''',$$

also stets $G''G_1 > G''G'''$. Daher muß, weil G'' äußerer Ähnlichkeitspunkt von G und M_1 ist, G''' zwischen G'' und G_1 und dementsprechend D'' zwischen G'' und P_2, also auch P_2 zwischen D'' und K'' liegen. Dieses letzte Resultat besteht nun nicht minder, wenn sich G'' auf der Verlängerung von PG''' über P hinaus befindet, wobei offenbar die Punkte P_2, G'' durch K'' getrennt werden; denn dieser Fall kann nur dann eintreten, wenn M_2, M_3 diesseits des Kreises M_1 liegen, wenn also $PG''' > PG_1$ ist. (Wenn nämlich M_2, M_3 sich jenseits M_1, also in den von M_1 und den Schenkeln von P begrenzten Flächenstück PG_1K_1 befinden, muß t_2 als Tangente von M_3 gleichfalls in dieses Flächenstück eintreten, also, weil es endlich und rings begrenzt ist, als Tangente von M_1 die Schenkel von P notwendig zwischen P, G_1 und P, K_1 schneiden, d. h. G'' muß ebenso wie K'' diesseits von P liegen.) Es müßte dann also auch $G''G''' > G''G_1$ und folglich mit Rücksicht auf den Ähnlichkeitspunkt G'' das Punktepaar G'', G''' durch G_1 und dementsprechend das Punktepaar G'', D'' durch P_2 getrennt werden, was, wenn wie hier K'' zwischen P_2 und G'' liegt, das obige Resultat notwendig zur Folge hat. Es werden also unter allen Umständen die Punkte K'' und D'' durch P_2 und aus Gründen der Analogie daher auch die Punkte G''' und T''' durch P_3 getrennt, und wir erhalten deshalb wegen (1.) und (2.)

$$\begin{cases} K''D'' = K''P_2 + P_2D'' = K''K_1 + G_1G''' \\ T'''G''' = T'''P_3 + P_3G''' = K''K_1 + G_1G'''. \end{cases}$$

Also folgt

$$K''D'' = T'''G'''. \tag{4.}$$

Aus (3.) ergibt sich nach einem ganz elementaren Satze (a. a. O. S. 109, 2. Lehrsatz), weil $D'T'$ die Länge der gemeinsamen inneren Tangente von G, K darstellt, daß durch P eine gemeinsame innere Tangente t dieser beiden Kreise hindurch-

geht. Desgleichen folgt aus (4.), weil G, K innerhalb des Winkelraumes P dessen Schenkel in den Punkten G''', K'' berühren, von denen aus die Tangenten $T'''G'''$ und $K''D''$ gezogen sind, nach einem anderen sehr einfachen Satze (a. a. O. S. 110, 3. Lehrsatz), daß die Kreise G und K von P aus gesehen unter gleich großen Winkeln erscheinen, und dies ist wegen der soeben ermittelten, durch P gehenden gemeinsamen inneren Tangente t offenbar nur dann möglich, wenn t mit der Winkelhalbierungslinie PM_1 zusammenfällt. PM_1 berührt also beide Kreise G und K als gemeinsame innere Tangente und unser Hilfssatz ist somit vollständig bewiesen.

Zieht man an den Tripel sich paarweise ausschließend berührender Kreise M_1, M_2, M_3 außer den beiden im Hilfssatze betrachteten Tangenten in analoger Weise noch diejenige gemeinsame äußere Tangente an M_2, M_3, deren Berührungspunkte durch die Zentrale M_2M_3 vom Mittelpunkte M_1 getrennt werden, so ergibt sich in bezug auf diese drei Tangenten, die wir kurz die „*Außentangenten des Kreistripels*“ nennen wollen, daß es, was oft übersehen zu werden scheint, zwei ganz verschiedene Arten solcher Kreistripel gibt, nämlich „*Tripel 1. Art*“, welche im Inneren ihres Außentangentendreiecks liegen und „*Tripel 2. Art*“, die sich außerhalb dieser Dreiecksfläche befinden. Ja, es zeigt sich sogar, daß unsere bisherige Voraussetzung, wonach je zwei Außentangenten einen, die drei Kreise ganz in sich enthaltenden, nicht konvexen Winkelraum bilden, durchaus keine an sich notwendige ist. Ist nämlich etwa M_2 von exzessiver Kleinheit im Vergleich mit M_1 und M_3, so werden im allgemeinen, wie sofort ersichtlich, die an die Kreispaare M_1, M_2 und M_2, M_3 gelegten „Außentangenten“ bezw. die Kreise M_3, M_1 durchschneiden, so daß nur in dem betreffenden *konvexen* Winkelraum alle Kreise ganz enthalten sind, während hinsichtlich der anderen beiden Ecken des Außentangentendreiecks ein teilweises Heraustreten des Kreises M_1 bezw. des Kreises M_3 aus dem betreffenden nicht konvexen Winkelraum stattfindet. Da also hier offenbar die genannte Voraussetzung nicht erfüllt ist, so haben wir die solchen Fällen entsprechenden „*Tripel 3. Art*“ zu denen der 1. und 2. Art noch hinzuzufügen, damit unsere Einteilung von Tripeln sich paarweise ausschließend berührender Kreise eine vollständige wird.

Durch die *Malfatti*sche Aufgabe wird also ein Tripel 1. Art M_1, M_2, M_3 postuliert, dessen Außentangentendreieck mit einem gegebenen ΔABC zusammenfällt.

Nimmt man die Aufgabe als gelöst an, so erhält man bei sukzessiver Anwendung des Hilfssatzes auf die Dreieckswinkelräume A, B, C und bei gleicher Bezeichnung der inneren Tangenten wie dort, z. B. einen Kreis L_1, welcher BC auf der inneren Seite in dem zwischen B und C gelegenen Punkte $A_1 = (BC, t_1)$ und außerdem t_2, t_3 berührt, der also hierdurch allein schon völlig festgelegt ist. Dieser Kreis L_1 muß aber (wegen B) auch die Winkelhalbierende von B und (wegen C) auch die Winkelhalbierende von C berühren, derart, daß er, wenn O den Inkreismittelpunkt von ΔABC bedeutet, mit dem Inkreise des ΔOBC identisch ist. Mit Hinzunahme der analog konstruierten Kreise L_2, L_3 sieht man also, daß, *wenn die Aufgabe für das vorgelegte Dreieck überhaupt lösbar ist*, nur eine, und zwar die der *Steiner*schen Konstruktion entsprechende Lösung möglich sein kann, da sich dann z. B. der *Malfatti*sche Kreis M_1 *eindeutig* dadurch ergibt, daß man, wenn

L_3 die Gerade AB in C_1 berührt, von C_1 an L_2 auf der dem Punkte A abgewandten Seite die Tangente t_3 legt und M_1 als denjenigen Berührungskreis von AB, AC, t_3 zeichnet, welcher im Innern des Dreieckswinkelraumes A liegt und t_3 auf der nach A hin gewandten Seite berührt [1]).

Es bleibt also noch übrig einen Existenzbeweis zu führen, denn erst dann, wenn wir, *und zwar auf rein geometrischem Wege* noch dargetan haben, daß ein Tripel 1. Art für das vorgelegte *ΔABC überhaupt existiert*, ist die rein geometrische Herleitung der *Steiner*schen Lösung wirklich vollendet.

Dieser Existenzbeweis kann auf verschiedene Art geführt werden, am kürzesten wohl mit Hilfe einer Stetigkeitsbetrachtung, deren Grundgedanken ich einer Mitteilung des Herrn Dr. *H. Hasse* verdanke, in folgender Weise:

An den Inkreis O des ΔABC, dessen Seiten und Winkel in üblicher Weise mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet werden mögen, lege man in den Punkten, in denen er die Strecken OA, OB, OC trifft, die Tangenten, welche bezw. mit den von A, B, C ausgehenden Seitenpaaren kleinere Dreiecke bilden und bestimme deren Inkreismittelpunkte A', B', C'. Ist dann X ein beliebiger, zwischen O und A' auf OA gelegener Punkt, so verstehen wir unter dem Kreise X den um X geschlagenen Kreis, welcher b und c berührt und bezeichnen diese Berührungspunkte bezw. mit X_b und X_c. Nunmehr konstruieren wir den Kreis Y, welcher X von Außen auf der dem Punkte A abgekehrten Seite der Geraden XX_c sowie a und c berührt und desgleichen den Kreis Z, welcher X von Außen auf der dem Punkte A abgekehrten Seite der Geraden XX_b sowie a und b berührt. Die Kreise Y, Z sind hierdurch eindeutig festgelegt und werden nach der Theorie des *Apollonis*chen Berührungsproblems einfach dadurch gefunden, daß man an X auf den den Ecken zugewandten Seiten dieses Kreises die zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten a, b, c parallelen Tangenten legt, wodurch ein dem gegebenen ähnliches und umgekehrt ähnlich liegendes Dreieck $A_X B_X C_X$ entsteht (Fig. 3), und die den Ecken B und C resp. am nächsten gelegenen Punkte U, V, welche bezw. die Verbindungslinien BB_X und CC_X aus dem

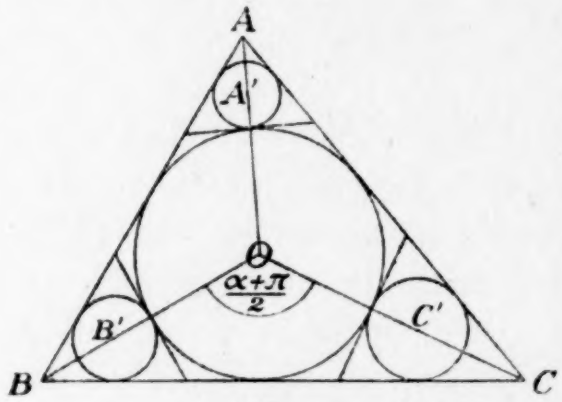


Fig. 2.

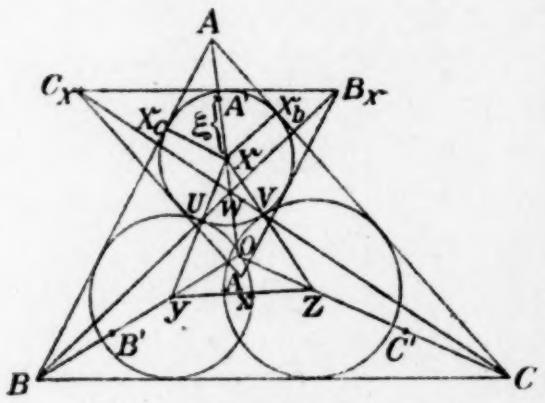


Fig. 3.

[1]) Wenn *Steiner* vorschreibt, der Kreis M_1 solle als *Inkreis* des Dreiseits AB, AC, t_3 konstruiert werden, so ist dies nicht unbedingt richtig, da hierbei offenbar stillschweigend angenommen wird, daß die auf die angegebene Art konstruierte Gerade t_3 die Dreieckseite AC stets diesseits von A und nicht auf ihrer Verlängerung über A hinaus trifft. Der hiernach ausgeschlossene Fall ist nämlich sehr wohl möglich, wie man sofort sieht, wenn man sich z. B. ein ΔABC zeichnet, in welchem die Größen $\pi - \sphericalangle ABC$ und $\frac{AB}{AC}$ sehr klein sind.

Umfang des Kreises X ausscheiden, mit X verbindet. Diese Verbindungslinien treffen dann bezw. OB und OC in den gesuchten Mittelpunkten Y, Z. Offenbar ist der Schnittpunkt W von BB_X und CC_X der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke ABC und $A_XB_XC_X$ und als solcher auch innerer Ähnlichkeitspunkt der Inkreise dieser Dreiecke, d. h. der Kreise O und X. Er muß daher auf der Zentralen OX liegen und wird bekanntlich durch O und X vom äußeren Ähnlichkeitspunkte dieser Kreise, d. h. von A harmonisch getrennt.

Den Punkt X denken wir uns jetzt in stetiger Bewegung von A' bis O begriffen, wobei wegen $(OXWA) = -1 =$ Konst. offenbar eine projektive Beziehung zwischen den Lagen von X und W mit den Doppelpunkten O, A resultiert. Die Strecke $A'X$ bezeichnen wir mit ξ, die Radien der 3 Kreise X, Y, Z resp. mit x, y, z. Da sich X und Y in U von Außen berühren, so ergibt sich für die Länge ihrer Zentrale die Gleichung $XY = x + y$, und hieraus folgt sofort, daß das Vorrücken von X in Richtung auf O hin von einem dauernden Zurückweichen von Y in Richtung auf B begleitet sein muß, da sonst der Fall eintreten würde, wo bei simultanem Vorrücken von X und Y nach O hin einer Vergrößerung von x und y, also auch von $x + y$ eine Verkleinerung von XY, die dann, wie leicht ersichtlich, wegen $\sphericalangle AOB = \frac{\pi + \gamma}{2} > \frac{\pi}{2}$ eintreten müßte, gegenüber stände. Ebenso wie Y muß sich natürlich auch Z dauernd von O entfernen, und man übersieht sofort, daß eine stetige Bewegung des Punktes X von A' bis O notwendig stetige Bewegungen der Punkte Y, Z von O bis B' resp. C' zur Folge hat, denn, wenn der Kreis X für $\xi = 0$ mit dem Kreise A' zusammenfällt, koinzidieren die Kreise Y, Z offenbar beide mit dem Inkreise O, während sie, wenn X für $\xi = A'O$ selbst in den Inkreis O übergeht, augenscheinlich mit den voneinander ganz getrennt liegenden Kreisen B', C' identisch werden (Fig. 2); und daß sich dabei z. B. Y auch wirklich *stetig* bewegt, ergibt sich am einfachsten aus der offenbaren Wechselseitigkeit der Konstruktionsbedingungen, vermöge deren man, um alle Lagen des Kreispaares X, Y zu erhalten, diese Kreise ihre Rollen als unabhängige und abhängige Variable tauschen lassen kann: Ist demgemäß nach Annahme eines beliebigen, zusammengehörigen Punktepaares X, Y $Y_1 \ldots Y_2$ ein für Y *willkürlich vorgeschriebenes kleines* Intervall auf der Strecke $B'O$, so gehört zu ihm notwendig ein endliches Intervall $X_1 \ldots X_2$ auf OA' für X derart, daß jedem X innerhalb $X_1 \ldots X_2$, weil die Bewegungen, wie wir sahen, mit konstanten Richtungssinnen erfolgen, ein Y innerhalb des Intervalls $Y_1 \ldots Y_2$ umkehrbar eindeutig entspricht usw.

Aus dem über Anfangs- und Endlagen und Bewegungsrichtungen Gesagten folgt nun unmittelbar, daß während der ganzen Bewegung die 3 Kreise dauernd im Inneren des ΔABC völlig enthalten bleiben, so daß zum Nachweise der Existenz eines Tripels 1. Art, dessen Außentangentendreieck das Gegebene ist, offenbar nur noch gezeigt werden muß, wie durch die Bewegung der zuerst zusammenfallenden und zuletzt ganz auseinanderliegenden Kreise Y, Z notwendig ihre äußere Berührung, oder, was dasselbe ist, ein Moment der Gleichheit der beiden Strecken YZ und $y + z$ herbeigeführt wird.

Hierzu betrachten wir die Differenz $YZ - (y + z)$, die wir als eindeutige Funktion von ξ mit $\varphi(\xi)$ bezeichnen und stellen fest, daß aus der nachgewiesenen Stetigkeit der Bewegungen sofort die Stetigkeit der beiden Bestandteile dieser Funktion und somit auch die Stetigkeit der Funktion selbst hervorgeht: Für $y + z$ folgt dies daraus, daß sich die Radien y, z proportional den Abständen der Mittelpunkte von den betreffenden Ecken des Dreiecks ändern, und in bezug auf die Länge YZ der Zentrale kann hier ebenfalls rein geometrisch in besonders einfacher Weise deutlich gemacht werden, daß, selbst wenn sich Y, Z ganz unabhängig voneinander nach B' resp. C' hin bewegen, überall stets endliche Intervalle $Y_1 \ldots Y_2$ resp. $Z_1 \ldots Z_2$ für Y und Z bestimmbar sind, innerhalb deren sich alle ihnen entsprechenden Strecken YZ um weniger als eine beliebig vorgegebene kleine Größe voneinander unterscheiden, denn wegen $\sphericalangle BOC = \frac{\pi + \alpha}{2} > \frac{\pi}{2}$ folgt, daß, wenn man sich die Intervalle zunächst ganz willkürlich gewählt denkt, stets $Y_1Z_1 \leqq YZ \leqq Y_2Z_2$ sein muß, wofern nur $Y_1B' \geqq YB' \geqq Y_2B'$ und $Z_1C' \geqq ZC' \geqq Z_2C'$ ist, während in $Y_2Z_2 - Y_1Z_1 = (Y_2Z_2 - Y_2Z_1) + (Y_2Z_1 - Y_1Z_1)$ die absoluten Beträge der beiden in Klammern eingeschlossenen Größen durch Wahl der betreffenden Grenzpunkte natürlich stets beliebig verkleinert werden können usw.

Dieser Stetigkeitsbeweis für $\varphi(\xi)$ hat zugleich ergeben, daß, wenn ξ das Intervall $0 \ldots A'O$ durchläuft, YZ in beständigem Wachsen von 0 bis zur Größe $B'C'$ begriffen ist, während $y + z$, natürlich dauernd abnehmend von dem Betrage 2ϱ bis zur Größe $b' + c'$ herabsinkt, wo ϱ, b', c' bezw. die Radien der Kreise O, B', C' bedeuten. Da nun die Kreise B', C' völlig getrennt voneinander liegen und demgemäß $B'C' > b' + c'$ ist, so ergibt sich für die stetige Funktion $\varphi(\xi)$, daß sie während der Bewegung des Kreises X mit dem negativen Werte -2ϱ beginnt und ununterbrochen wachsend zuletzt den wesentlich positiven Wert $B'C' - (b' + c')$ erreicht. Es muß daher $\varphi(\xi)$, wie sich in bekannter Weise durch mengentheoretische Mittel streng beweisen läßt, in dem genannten Intervalle notwendig eine Nullstelle besitzen und hiermit ist nach unseren früheren Darlegungen nicht nur der gegeforderte Existenzbeweis erbracht, sondern auch die Richtigkeit der *Steiner*schen Lösung des *Malfatti*schen Problems nunmehr vollständig dargetan.

Zum Schluß soll nur noch kurz angedeutet werden, wie man sich auch auf rein elementargeometrischem Wege von der Existenz eines Tripels 1. Art für das vorgelegte Dreieck unschwer überzeugen kann:

Wie am Ende des 1. Teils dieser Arbeit angegeben, zeichne man im Sinne der *Steiner*schen Lösung einen Kreis M_1, welcher die, in der dort mitgeteilten Art an L_2 gelegte Tangente t_3 in P_3 und die Dreiecksseiten AB, AC bezw. in P_{1c}, P_{1b} berühren möge, konstruiere sodann einen Kreis M_2, welcher M_1 in P_3 von Außen und überdies die Gerade AB berührt, so i e einen Kreis M_3, welcher auf der dem Punkte P_{1c} abgekehrten Seite der Zentrale die Kreise M_1, M_2 von Außen nebst der Geraden AC berührt. Aus den Konstruktionsbedingungen für t_3 und wegen $\sphericalangle AOC = \frac{\pi + \beta}{2} > \frac{\pi}{2}$ folgt dann leicht in bezug auf die Größe ε

des Winkels $\sphericalangle BC_1P_3 = \sphericalangle P^{1c}M_1P_3$, daß $\frac{\alpha}{2} < \varepsilon < \frac{\alpha+\pi}{2}$ sein muß, und hieraus ergibt sich weiter, daß M_2 ebenso wie M_1 im Dreieckswinkelraum A ganz enthalten ist, und daß, selbst wenn etwa die Gerade AB den Kreis M_3 durchschneiden sollte, doch unter allen Umständen der Berührungspunkt P_{3b} von M_3 und AC durch P_{1b} von A getrennt wird. Für das nunmehr wirklich vorliegende Tripel sich paarweise ausschließend berührender Kreise M_1, M_2, M_3 fallen also bestimmt zwei Außentangenten mit den Seiten AB, AC des gegebenen $\measuredangle ABC$ zusammen, und die bei Anwendung unseres Hilfssatzes, (der auch im Falle eines Tripels 3. Art, wie leicht einzusehen, unverändert seine Gültigkeit behält), in bezug auf den Winkelraum A für das Tripel M_1, M_2, M_3 sich ergebenden *beiden Hilfskreise werden wegen ihrer Beziehungen zu t_3 sofort als identisch erkannt mit den beiden Inkreisen L_2, L_3 der Dreiecke OCA und OAB.* (Natürlich liegt hierin der Grund, warum wir die Einzelheiten der Konstruktion des Tripels gerade so wie angegeben gewählt haben.) Ist nun $A\bar{B}\bar{C}$ das Außentangentendreieck unseres Tripels, wobei also $\bar{B}, \bar{C}$ resp. auf AB, AC liegen müssen, so resultiert, wenn man den Hilfssatz auch noch auf die, mindestens 2 der 3 Kreise M_1, M_2, M_3 ganz in sich enthaltenden Winkelräume $\bar{B}, \bar{C}$, (von denen hier $\bar{B}$, wie wir früher sahen, im Falle eines Tripels 3. Art konvex ist und natürlich alle 3 Kreise enthält), anwendet, ein Schnittpunkt $\bar{O}$ der betreffenden 3 Winkelhalbierenden, wobei $\bar{O}$ mit dem Mittelpunkt des Inkreises, oder eines Ankreises von $\measuredangle A\bar{B}\bar{C}$ identisch ist, je nachdem es sich um ein Tripel 1. Art handelt, oder nicht. Da nun nach dem Hilfssatze jeder der beiden Hilfskreise L_2, L_3 von zweien der genannten 3 Winkelhalbierenden berührt wird, so gelangt man in allen Fällen zu der Beziehung $\sphericalangle L_2\bar{O}L_3 = \frac{3\pi-\alpha}{4} = \sphericalangle L_2OL_3$, und hieraus folgt dann das Zusammenfallen von $\bar{O}$ mit O was bei Annahme eines Tripels 2. oder 3. Art stets zu einem Widerspruche führt, indem dann O der Mittelpunkt des Inkreises und eines Ankreises ein- und desselben Dreiecks sein müßte. Unser wirklich konstruiertes Tripel M_1, M_2, M_3 ist also tatsächlich ein Tripel 1. Art, dessen Außentangentendreieck mit dem gegebenen $\measuredangle ABC$ nicht nur den Winkel α, sondern auch den Inkreismittelpunkt O sowie die Inkreise L_2, L_3 der betreffenden Teildreiecke gemein hat. Das Außentangentendreieck muß also mit $\measuredangle ABC$ völlig zusammenfallen, und der geforderte Existenzbeweis ist hiermit abermals erbracht.

Unsere Konstruktion der Kreise M_2, M_3 war hierbei nach der Theorie der bis auf Apollonius zurückgehenden bekannten Berührungsaufgabe erfolgt. Wir haben also in gewissem Sinne *das Malfattische Problem auf das Apollonische Berührungsproblem zurückgeführt* und darin liegt offenbar das Charakteristische der hier durchgeführten Herleitung der *Steiner*schen Lösung.

Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern.

(Zweiter Teil: Fall eines ungeraden l).

Von Herrn *Helmut Hasse* in Kiel.

Ich gebe in dieser Arbeit die Fortsetzung meiner früheren Untersuchungen [1]) über die Normenreste in algebraischen Zahlkörpern. Die Ergebnisse sind zum Teil an sich von Interesse, zum anderen Teil sollen sie in einer weiteren Arbeit zu einer wesentlichen Verschärfung der allgemeinsten Reziprozitätsgesetze in algebraischen Körpern Verwendung finden. In den Bezeichnungen schließe ich mich an die genannten Arbeiten an.

1. In Q. N. R. hatte ich im Falle $l = 2$ für den Wert des Symbols $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ eine gewisse Normalform hergeleitet, nämlich

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{L(x/y)} \tag{1.}$$

wo $L(x/y)$ eine symmetrische Bilinearform in den Exponentenreihen x_i und y_i aus der multiplikativen Darstellung von α und β für den Bereich von $\mathfrak{l}$ ist, die bei geeigneter Wahl des Fundamentalsystems $\lambda; \eta_1, \ldots, \eta_m; \eta_a$ für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$ die in Q. N. R., S. 77 angegebene, einfache Gestalt annimmt. Nachdem in Z. V. die notwendigen Vorbereitungen für die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf den Fall eines ungeraden l durch den direkten Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol getroffen sind, fällt es nunmehr nicht schwer, eine (1.) entsprechende Normalform auch in diesem allgemeinsten Fall herzuleiten. Die Beweise und das Resultat werden hier viel einfacher, als für $l = 2$, da für ungerades l stets $\left(\frac{\alpha, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ ist, also das die

---

[1]) *H. Hasse*, Zur Theorie des quadratischen *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern, dieses Journ. Bd. 153, S. 76 ff., im folgenden zitiert mit Q. N. R. *H. Hasse*, Zerlegungs- und Vertauschungssatz für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper für den Fall eines Primteilers $\mathfrak{l}$ des Relativgrades l, erscheint im nächsten Bande dieses Journals, im folgenden zitiert mit Z. V. S. a. *K. Hensel* und *H. Hasse*, Über die Normenreste und Nichtreste eines relativ-zyklischen Körpers vom Primzahlgrad l nach einem Primteiler $\mathfrak{l}$ von l, erscheint demnächst in den Math. Ann., im folgenden zitiert mit H. H.

Untersuchungen in Q. N. R. erheblich komplizierende Glied, das eventuell in der Hauptdiagonale der reduzierten Matrix L noch stehen bleibt, hier gar nicht auftreten kann.

2. Sei also l eine ungerade Primzahl, k ein beliebiger Oberkörper des Kreiskörpers k_ζ der l-ten Einheitswurzeln und $\mathfrak{l}$ ein Primteiler von l in k. Durch die Festsetzungen von Z. V. ist das *Hilbert*sche Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ folgenden Bedingungen unterworfen:

Für beliebige Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ aus $k(\mathfrak{l})$ ist:

(2.) $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ oder ζ^c; (ζ feste, primitive l-te Einheitswurzel, $1 \leqq c \leqq l-1$)

je nachdem α Normzahl von $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\beta})$ ist oder nicht.
(*„Vorläufige" Definition*).

(3.) $\left(\frac{\alpha_1, \beta}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\alpha_2, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$; (*Zerlegungssatz für die erste Komponente*).

(4.) $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = 1$; (*Vertauschungssatz*). [1])

(2.)—(4.) sind nach den Ergebnissen von Z. V. widerspruchsfrei. Aus (3.) und (4.) folgt noch:

(5.) $\left(\frac{\alpha, \beta_1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\alpha, \beta_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha, \beta_1 \beta_2}{\mathfrak{l}}\right)$; (*Zerlegungssatz für die zweite Komponente*).

Sei nun

(6.) $$\lambda = \eta_0;\ \eta_1, \ldots, \eta_m;\ \eta_a = \eta_{m+1}$$

ein beliebiges Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l})$ [2]), dann folgt aus (3.) und (5.) für zwei beliebige Zahlen

(7.) $$\alpha = \prod_{i=0}^{m+1} \eta_i^{x_i} \alpha_0^l \text{ und } \beta = \prod_{j=1}^{m+1} \eta_j^{y_j} \beta_0^l (\mathfrak{l}); \quad (0 \leqq x_i, y_j \leqq l-1)$$

aus $k(\mathfrak{l})$:

(8.) $$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{i,j=0}^{m+1} \left(\frac{\eta_i, \eta_j}{\mathfrak{l}}\right)^{x_i y_j} = \zeta^{\sum_{i,j=0}^{m+1} a_{ij} x_i y_j} = \zeta^{L(x/y)},$$

wenn $\left(\frac{\eta_i, \eta_j}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{a_{ij}}$ gesetzt wird. Da nach Z. V. eine den Bedingungen (2.)—(5.) genügende Bestimmung der Werte des Symbols $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ möglich ist, so gilt also, wenn an einer derartigen Bestimmung festgehalten wird:

---

[1]) Die in Z. V. noch getroffene Festsetzung $\left(\frac{\alpha\alpha_0^l, \beta\beta_0^l}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ ist ersichtlich eine Folge aus (2.), (3.), (5.), braucht also hier nicht mit aufgezählt zu werden.

[2]) Siehe etwa H. H., S. 3.

Satz 1. *Zu jedem Fundamentalsystem* (6.) *existiert eine Bilinearform*

$$L(x/y) \equiv \sum_{i,j=0}^{m+1} a_{ij} x_i y_j \mod l,$$

so daß der Wert des Symbols $\left(\frac{\alpha, \beta}{l}\right)$ *für zwei beliebige Zahlen* (7.) *aus* $k(l)$ *durch* (8.) *gegeben wird.*

Die Koeffizientenmatrix $L = (a_{ij})$ dieser Bilinearform ist nach (4.) schiefsymmetrisch mod. l. Ferner gilt:

Satz 2. *Es ist die Determinante* $|L| = |a_{ij}| \not\equiv 0 \mod l$.

Beweis: Wäre $|L| \equiv 0 \mod l$, so gäbe es eine mod. l nicht identisch verschwindende Lösung $(y_j^{(0)})$ der Kongruenzen

$$\sum_{j=0}^{m+1} a_{ij} y_j \equiv 0 \mod l,$$

so daß für dies System $(y_j^{(0)})$ *identisch* in den x_i gälte:

$$L(x/y^{(0)}) \equiv \sum_{i=0}^{m+1} x_i \left(\sum_{j=0}^{m+1} a_{ij} y_j^{(0)} \right) \equiv 0 \mod l.$$

Das würde aber bedeuten, daß für das jenem System $(y_j^{(0)})$ entsprechende β_0 *jedes* α der Gleichung $\left(\frac{\alpha, \beta_0}{l}\right) = 1$ genügte, im Widerspruch zu (2.), da dies nach den Ergebnissen von H. H. nur für $\beta_0 = \xi^l(l)$, d. h. $(y_j^{(0)}) \equiv 0 \mod l$ eintritt.

Aus dem Nichtverschwinden von $|L|$ mod. l ergibt sich nun sofort die fundamentale Tatsache:

Satz 3. *Zu jedem Fundamentalsystem* (6.) *existiert bis auf eine willkürliche multiplikative Konstante* $c \not\equiv 0 \mod l$ *auch nur eine Bilinearform* L *mit der Eigenschaft von Satz* 1, *d. h. durch die Festsetzungen* (2.)–(4.) *ist der Wert von* $\left(\frac{\alpha, \beta}{l}\right)$ *in allen Fällen bis auf die einmalige Wahl eines bestimmten* ζ *eindeutig festgelegt.*

Beweis: Sei $L'(x/y)$ eine zweite Bilinearform mit der Eigenschaft von Satz 1, die einer anderen Bestimmung der Werte von $\left(\frac{\alpha, \beta}{l}\right)$ auf Grund von (2.)–(4.) entspricht. Dann gilt nach (2.):

Aus $L(x/y) \equiv 0 \mod l$ folgt $L'(x/y) \equiv 0 \mod l$ und umgekehrt. Man überzeugt sich aber leicht auf elementarem Wege, daß dies infolge von $|L| \not\equiv 0 \mod l$ die Identität

$$L'(x/y) \equiv cL(x/y) \mod l; \quad (c \not\equiv 0 \mod l)$$

zur Folge hat.

3. Aus den Gleichungen (3.)–(5.) von Z. V. folgt ohne weiteres, daß die Matrix L für jedes beliebige, nach steigenden Graden geordnete Fundamentalsystem:

$$\lambda = \eta_0;\ \eta_1, \ldots, \eta_m;\ \eta_a = \eta_{m+1},$$

in anderer Schreibweise:

$$\lambda;\ \eta_{11}, \ldots, \eta_{1f};\ \eta_{21}, \ldots, \eta_{2f}; \ldots;\ \eta_{e1}, \ldots, \eta_{ef};\ \eta_a$$

folgenden Typus hat ($r = 1, 2, \ldots, f$):

(9.)

	λ	η_{1r}	η_{2r}	.....	η_{er}	η_a
λ	0	A_{01}	A_{02}	.....	A_{0e}	$a_{0\,m+1}$
η_{1r}	A_{10}	A_{11}	A_{12}	.....	A_{1e}	0
η_{2r}	A_{20}	A_{21}				
η_{er}	A_{e0}	A_{e1}				
η_a	$a_{m+1\,0}$	0	.....			0

Dabei sind entsprechend den e Basissystemen $\eta_{1r}, \eta_{2r}, \ldots, \eta_{er}$ und den beiden „Eckelementen" $\eta_0 = \lambda$, $\eta_{m+1} = \eta_a$ die Koeffizienten a_{ij} in Teilsysteme $A_{\varrho\sigma}$ von entsprechender Ausdehnung zusammengefaßt, und a_{ij} entspricht jedesmal demjenigen *Hilbert*schen Symbol $\left(\frac{\eta_i, \eta_j}{l}\right) = \zeta^{a_{ij}}$, das aus den links und oben angegebenen Basiselementen, die seine Zeile und Spalte bestimmen, gebildet ist [1]). Wegen der Schiefsymmetrie ist

$$A_{\varrho\sigma} + A'_{\sigma\varrho} \equiv 0 \bmod l,$$

wenn $A'_{\sigma\varrho}$ das transponierte System zu $A_{\sigma\varrho}$ ist.

Aus $|L| \equiv 0 \bmod l$ folgt, daß auch die Determinanten der $A_{\varrho,\, e+1-\varrho}$ der Nebendiagonale, die „komplementären" Basissystemen $\left(\text{Gradsumme } \frac{el}{l-1}\right)$ entsprechen, sowie die Eckelemente $a_{0\,m+1}$ und $a_{m+1\,0}$ mod. l von Null verschieden sind. Daher läßt sich, ganz entsprechend wie in Q. N. R. (Substitution (7.)) das Fundamentalsystem so transformieren, daß die zugehörige Matrix übergeht in:

$$\begin{pmatrix}
0 & \bar{A}_{01} & \bar{A}_{02} & \cdots & \bar{A}_{0e} & 1 \\
\bar{A}_{10} & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & E & 0 \\
\bar{A}_{20} & \bar{A}_{21} & & & & \\
 & & E & & & \\
 & & -E & & & \\
\bar{A}_{e0} & -E & & & & \\
-1 & 0 & \cdots & & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet E die f-reihige Einheitsmatrix. Die Anzahl e der in der Nebendiagonale stehenden $\pm E$ ist wegen $e = e_0\,(l-1)$ stets gerade; es tritt also, anders wie in Q. N. R., hier nie ein „Zentralglied" in der Matrix L auf. In den Hauptdiagonalen der $\bar{A}_{\varrho\varrho}$ stehen entsprechend der Bemerkung a. S. 184 unten nur Nullen.

[1]) Siehe Q. N. R., S. 82.

Durch weitere Transformation des Fundamentalsystems, entsprechend zu Q. N. R., S. 91/92, läßt sich dann die Matrix ohne weiteres auf die Normalform bringen:

(10.)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -E & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die genannten beiden Transformationen sind genau dieselben, wie in Q. N. R., mit dem einen, ganz unwesentlichen Unterschied, daß hier die zu transformierende Matrix schiefsymmetrisch ist [1]), und mit der schon zu Beginn erwähnten, bedeutenden Vereinfachung durch das identische Verschwinden der Hauptdiagonalglieder a_{ii}.

Es ergibt sich somit der Satz:

Satz 4. *Es läßt sich ein Fundamentalsystem* [2])

$$\lambda = \eta_0;\ \eta_{ij};\ \eta_a = \eta_{m+1};\qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, e \\ j = 1, 2, \ldots, f \end{pmatrix}$$

für die multiplikative Darstellung in k (l) so wählen, daß für zwei beliebige, durch dieses System dargestellte Zahlen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \eta_{l0}^{x_0} \cdot \prod_{i,j} \eta_{ij}^{x_i} \cdot \eta_{m+1}^{x_{m+1}} \alpha_0^l\ (\mathfrak{l}) \\ \beta &= \eta_{l0}^{y_0} \cdot \prod_{i,j} \eta_{ij}^{y_{ij}} \cdot \eta_{m+1}^{y_{m+1}} \beta_0^l\ (\mathfrak{l}) \end{aligned}\right\};\ (0 \leqq x_1 y \leqq l-1)$$

aus k (l) das Hilbertsche Normenrestsymbol durch die Gleichung gegeben wird:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L(x/y)}.$$

Dabei bedeutet $L(x/y)$ die schiefsymmetrische Bilinearform mit der Koeffizientenmatrix (10.), *es ist also*

$$L(x/y) = (x_0 y_{m+1} - x_{m+1} y_0) + \sum_{i=1}^{\frac{e}{2}} \sum_{j=1}^{f} (x_{ij} y_{e+1-i\,j} - x_{e+1-i\,j} y_{ij}).$$

Dies Resultat stellt die gewünschte Verallgemeinerung des Ergebnisses von Q. N. R. auf den Fall eines ungeraden l dar.

4. Aus der Form (9.) der Matrix L für ein beliebiges Fundamentalsystem folgt sofort, daß zu irgendzwei komplementären Basissystemen $\eta_{i1}, \ldots, \eta_{if}$ und

---

[1]) Für $l = 2$ fallen die Begriffe schiefsymmetrisch und symmetrisch mod. 2 zusammen Natürlich hätte man in Q. N. R. auch immer von schiefsymmetrischen Matrizen reden können. Die Schiefsymmetrie ist natürlich invariant gegen die in Frage kommenden kogredienten Transformationen $P'LP$.

[2]) und zwar ein solches genau von der Beschaffenheit, wie stets in H. H., Z. V.

$\eta_{e+1-i,1}, \ldots, \eta_{e+1-i,f}$ von zu l primen Graden h und $h' = \dfrac{el}{l-1} - h$ eine Bilinearform $L_0(x/y)$ mit der f-reihigen Matrix $A_{i,e+1-i}$ nicht verschwindender Determinante mod. l gehört, so daß für irgendzwei Einseinheiten α, β aus $k(\mathfrak{l})$, die mindestens den Grad h bezw. h' haben, also eine Darstellung

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \eta_{i1}^{x_1} \quad \ldots \quad \eta_{if}^{x_f} \quad \bar{\eta} \ (\mathfrak{l}) \\ \beta &= \eta_{e+1-i,1}^{y_1} \ldots \eta_{e+1-i,f}^{y_f} \ \bar{\bar{\eta}} \ (\mathfrak{l}) \end{aligned}\right\}; \ 0 \leqq x, y \leqq l-1; \ (\bar{\eta}, \bar{\bar{\eta}} \text{ von mindestens } (h+1)\text{-tem, } (h'+1)\text{-tem Grade})$$

besitzen,

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L_0(x/y)}$$

gilt. Wegen des Nichtverschwindens der Determinante $|L_0| \equiv |A_{i,e+1-i}| \bmod. l$ kann dann, genau wie bei Satz 3, die eindeutige Bestimmtheit von L_0 bis auf einen konstanten Faktor $c \not\equiv 0 \bmod. l$ erschlossen werden.

5. Nachdem nach Satz 3 der Wert des *Hilbert*schen Normenrestsymbols $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ für alle Zahlen α, β aus $k(\mathfrak{l})$ bis auf die einmalige Auswahl von ζ eindeutig festgelegt ist, entsteht natürlich die Frage, ob und wie diese letzte Unbestimmtheit noch beseitigt werden kann. Naturgemäß ist *a* priori keine der $l-1$ primitiven l-ten Einheitswurzeln vor den anderen bevorzugt, da ja deren Unterscheidung als $e^{\frac{2\pi i}{l}}, e^{\frac{4\pi i}{l}}, \ldots$ nur auf Grund von Größeneigenschaften möglich ist, die Definition der Normenrestsymbole jedoch lediglich auf Teilbarkeitseigenschaften beruht. Es kann sich also nur darum handeln, für ein festes, a priori aber willkürliches ζ eine sinnvolle Normierung der Symbole $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ und überhaupt der nach dem bisherigen in ebendemselben Sinne unbestimmten Symbole $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ und $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ für die Teiler $\mathfrak{l}_i$ von

$$l = \mathfrak{l}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{l}_z^{l_z}$$

und alle zu l primen Primteiler $\mathfrak{p}$ von k anzugeben, auf Grund deren dann auch die Symbole für ein- und dieselben α, β aus k und verschiedene Primteiler in Zusammenhang gebracht werden können.

Für die zu l primen $\mathfrak{p}$ ist eine solche Normierung sehr leicht in folgender Weise zu erreichen:

Sei π eine Primzahl für $\mathfrak{p}$ und ω eine in $k(\mathfrak{p})$ enthaltene, primitive l^n-te Einheitswurzel mit größtmöglichem $n(\geqq 1)$. Es ist dann bekanntlich $p^f - 1 = l^n q$ mit zu l primem q, wenn f der Grad von $\mathfrak{p}$ ist. Dann bestehen die eindeutigen Darstellungen für irgendzwei Zahlen a, β aus k:

$$(11.) \qquad \left.\begin{aligned} \alpha &= \Pi^a \omega^b \alpha_0^l \ (\mathfrak{p}) \\ \beta &= \Pi^c \omega^d \beta_0^l \ (\mathfrak{p}) \end{aligned}\right\}; \ 0 \leqq a, b, c, d \leqq l-1.$$

Es kann dann [1])

[1]) *K. Hensel*, Über die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ-*Abel*schen Zahlkörpern, Math. Ann. 85, S. 9.

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^{\left|\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right|}$$

gesetzt werden. Man bestimmt nun einfach die zugrundegelegte l^n-te Einheitswurzel ω so, daß $\omega^{\frac{p^f-1}{l}} = \omega^{q^{ln}-1}$ gerade das festgewählte ζ ist, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, setzt bei irgendwie gewähltem ω das Symbol

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^{r\left|\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right|},$$

wenn $\omega^{q^{ln}-1}$ gleich der Potenz ζ^r des festgewählten ζ ist [1]). Hierdurch ist also vermöge der festen Wahl von ζ, und der in den Darstellungen (11.) enthaltenen Beziehungen von α, β zu diesem ζ für jedes $\mathfrak{p}$, eine gewisse Verbindung zwischen den Symbolwerten $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ für die einzelnen $\mathfrak{p}$ geschaffen.

Für die Primteiler $\mathfrak{l}_i$ von l ist etwas Ähnliches deshalb nicht möglich, weil in einem Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung in $k(\mathfrak{l}_i)$ im allgemeinen keine mit ζ in einfacher Beziehung stehende Größe enthalten ist. Die Normierung der Symbole $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ läßt sich jedoch auf Grund der eben getroffenen Normierung für die zu l primen $\mathfrak{p}$ durchführen, indem man fordert, daß für alle α, β aus k das über alle Primteiler $\mathfrak{w}$ von k erstreckte Produkt

$$\text{(12.)} \qquad \prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

sein soll. Wegen der Unabhängigkeit der Werte der Zahlen aus k für die einzelnen Stellen $\mathfrak{l}_i$ kann diese Forderung, wenn überhaupt, sicher die Normierung für jeden einzelnen Primteiler $\mathfrak{l}_i$ liefern. Sie kann nämlich, wie eine leichte Überlegung zeigt, durch die z Forderungen

$$\text{(13.)} \qquad \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha_i, \beta}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\alpha_i, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1; \quad (i = 1, 2, \ldots, z)$$

ersetzt werden, wo jedesmal α_i alle solchen Zahlen aus k bedeutet, die für die Bereiche der von $\mathfrak{l}_i$ verschiedenen Primteiler $\mathfrak{l}_j$ l-te Potenzen sind, (sodaß die Symbole für die $\mathfrak{l}_j$ in (12.) identisch 1 sind), und auf Grund von (13.) werden dann offenbar die Symbole für jedes einzelne $\mathfrak{l}_i$ in eindeutiger Weise normiert.

Der Nachweis daß die Forderungen (13.) mit der im vorhergehenden aufgestellten Bestimmung der Symbole $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ vereinbar sind, kommt wegen der Gültigkeit des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes auch für die zu l primen $\mathfrak{p}$ auf den Nachweis hinaus, daß (13.) nur mit der „vorläufigen Definition" (2.), S. 185 von $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ in Einklang steht, d. h. daß für alle α_i der angegebenen Beschaffenheit gilt:

---

[1]) Diese Bestimmung ist offensichtlich dieselbe, wie bei *Hilbert-Furtwängler*, siehe etwa *Ph. Furtwängler*, Über das Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern Math. Ann. 58.

„Wenn $\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha_i, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, ist auch $\left(\frac{\alpha_i, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1$ und umgekehrt". Der Nachweis dieser Tatsache bildet den Hauptpunkt beim Beweise der unter den Namen: *Hilbertsches allgemeines Reziprozitätsgesetz* bekannten Formel (12.). Er ist allgemein zuerst von *Furtwängler* [1]), neuerdings auf einfacherem, aber im Prinzip übereinstimmenden Wege von *Takagi* [2]) geführt und beruht auf dem sehr tiefliegenden Beweis spezieller, einfachster Teile des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes in k und seiner beiden Ergänzungssätze. Beide Beweise benutzen in wesentlichen Punkten transzendente Hilfsmittel und scheinen mir einer rein arithmetischen Behandlung auf Grund der hier eingeschlagenen *Hensel*schen Methoden nicht fähig zu sein [3]).

---

[1]) *Ph. Furtwängler* in der a. S. 190, Anm. 1 zitierten Arbeit, außerdem: Reziprozitätsgesetze für Primzahlexponenten II, Math. Ann. 72, S. 378, 380.

[2]) *T. Takagi*, Über eine Theorie des relativ *Abel*schen Zahlkörpers, Journ. Coll. Sc., Tokyo, Vol. XLIV, 5, S. 40 ff.

[3]) Vgl. das in der Einleitung zu meiner Arbeit: Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, dieses Journ. Bd. 153, S. 114 gesagte.

Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nicht-primäre Zahlen.

Von Herrn *Helmut Hasse* in Kiel.

Das allgemeinste Reziprozitätsgesetz für Potenzreste mit Primzahlexponenten l in einem beliebigen Oberkörper k des Kreiskörpers k_ζ der l-ten Einheitswurzeln läßt sich unter Verwendung des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in der einfachen Formel

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{w}}\right) = 1 \tag{1.}$$

zum Ausdruck bringen, die von *Hilbert* aufgestellt und zuerst von *Furtwängler* [1]) allgemein bewiesen wurde. Dabei bedeuten α, β zwei beliebige (ganze oder gebrochene) Zahlen $\neq 0$ aus k, und $\mathfrak{w}$ durchläuft alle Primteiler $\mathfrak{p}$ von k, sowie die den reellen zu k konjugierten $k^{(i)}$ zugeordneten „Primstellen" $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ [2]). Da man die nur für $l = 2$ von 1 verschiedenen „Vorzeichensymbole" durch ihre Exponentialdarstellung

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}_\infty^{(i)}}\right) = (-1)^{\frac{\operatorname{sgn}. \alpha^{(i)} - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}. \beta^{(i)} - 1}{2}}$$

ohne weiteres beherrscht, soll im folgenden der Einfachheit halber, ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit der anzustellenden Betrachtungen α im Falle $l = 2$ als total positive Zahl aus k vorausgesetzt werden, so daß die Primstellen $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ in (1.) fortgelassen werden können.

Dann lassen sich für beliebiges l mit der Zerlegung

$$l = \mathfrak{l}_1^{l_1} \dots \mathfrak{l}_z^{l_z}; \qquad (\mathfrak{l}_i \text{ vom Grade } f_i)$$

in k die aus (1.) folgenden, unter dem Namen allgemeines Reziprozitätsgesetz, erster und zweiter Ergänzungssatz bekannten Reziprozitätsbeziehungen in k in folgender Form schreiben:

---

[1]) *Ph. Furtwängler*, Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten I, II, III. Math. Ann. 67, 72, 74.

[2]) Siehe *Hasse*, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, dieses Journal Bd. 153, S. 120f.

(2.) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}_i}\right)$, wenn α, β prim zu l und zueinander;

(2a.) $\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\alpha, \varepsilon}{\mathfrak{l}_i}\right)$, wenn α prim zu l und $(\varepsilon) = \mathfrak{a}^l$;

(2b.) $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\alpha, \lambda}{\mathfrak{l}_i}\right)$, wenn α prim zu l und $(\lambda) = \prod_{i=1} \mathfrak{l}_i^{a_i} \cdot \mathfrak{a}^l$.

Dabei bedeuten die Symbole links verallgemeinerte *Legendre*sche Restsymbole für l-te Potenzreste, $\mathfrak{a}^l$ bezeichnet eine beliebige l-te Idealpotenz. Die rechts auftretenden Normenrestsymbole für die Teiler $\mathfrak{l}_i$ von $\mathfrak{l}$ beherrscht man bisher abgesehen von Spezialfällen (*Eisenstein*sches Reziprozitätsgesetz im Kreiskörper k_ζ, gewöhnliches quadratisches Reziprozitätsgesetz) nur insofern, als man Bedingungen für α angeben kann, unter denen sie sicher gleich 1 sind. Diese Bedingungen faßt man zusammen in den Definitionen der „primären" und „hyperprimären" Zahlen. Bezeichnet $\mathfrak{l}_0 = (1 - \zeta) = (\lambda_0)$ den Primteiler von l in k_ζ [1]), so nennt man eine Zahl α aus k primär bzw. hyperprimär, wenn sie zu l prim ist und der Bedingung

$$\alpha \equiv \xi^l \bmod. l\mathfrak{l}_0 \text{ bzw. } \bmod. l\mathfrak{l}_0\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_z$$

genügt (und für $l = 2$ total positiv ist). Für solche primäre bzw. hyperprimäre α spezialisiert lauten dann die Gesetze (2.)—(2b.):

(3.) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = 1$, wenn α, β prim zu l, zueinander und α primär;

(3a.) $\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = 1$, wenn $(\varepsilon) = \mathfrak{a}^l$ und α primär;

(3b.) $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = 1$, wenn $(\lambda) = \prod_{i=1}^{z} \mathfrak{l}_i^{a_i} \cdot \mathfrak{a}^l$ und α hyperprimär.

Nun sind von Herrn *Hensel* und mir in einer Reihe kürzlich erschienener Arbeiten [2]) Methoden dargelegt, die gestatten, den Wert der Normenrestsymbole $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}_i}\right)$ in expliziter Form darzustellen. Die Anwendung der Ergebnisse dieser Arbeiten führt zu folgenden Erweiterungen der bisher explizit bekannten Spezialfälle (3.)—(3b.) der Reziprozitätsgesetze (2.)—(2b.) auf gewisse nicht-primäre Zahlen:

---

[1]) Für $l = 2$ ist im folgenden stets $\zeta = -1$, also $\lambda_0 = 2$, $\mathfrak{l}_0 = 2$ zu setzen.

[2]) *K. Hensel*, Über die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ-*Abel*schen Zahlkörpern, Math. Ann. 85, S. 1 ff.

K. Hensel u. *H. Hasse*, Über die Normenreste und Nichtreste eines Relativ-zyklischen Körpers vom Primzahlgrad l nach einem Primteiler $\mathfrak{l}$ von l, Math. Ann. 90, S. 262 ff., zitiert mit H. H.

H. Hasse, zur Theorie des quadratischen *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern, dieses Journ. Bd. 153, S. 76 ff.

H. Hasse, Zerlegungs- und Vertauschungssatz für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper für den Fall eines Primteilers $\mathfrak{l}$ des Relativgrades l, erscheint im nächsten Bande dieses Journals, zitiert mit Z. V.

H. Hasse, Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern, II, dieses Journ. Bd. 153, S. 184 ff., zitiert mit H. N. R.

$$(4.)\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{a-1}{l}\cdot\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)},\ \text{wenn } (\alpha,\beta)=1 \text{ und } \left\{\begin{matrix} a\equiv 1 \bmod. l \\ \beta\equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}_0\end{matrix}\right\};$$

$$(4a.)\quad \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{a-1}{l}\right)},\ \text{wenn } \alpha\equiv 1 \bmod. l;$$

$$(4b.)\quad \left(\frac{l}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)},\ \text{wenn } \alpha\equiv 1 \bmod. l\mathfrak{l}_0.$$

Dabei bedeutet S die Spur in k. (4.) ist eine direkte Verallgemeinerung von (3.); (4a.) ist nicht so allgemein wie (3a.), da nur $\varepsilon=\zeta$ berücksichtigt wird, die entsprechende Verallgemeinerung von (3a.) ist vielmehr als in der Hauptformel (4.) für (α) oder $(\beta)=(\varepsilon)=\mathfrak{a}^l$ mitenthalten anzusehen. Ebenso ist (4b.) nicht so allgemein wie (3b.), da nur $\lambda=l$ berücksichtigt wird, die entsprechende Verallgemeinerung von (3b.) auf beliebiges λ ist mir bisher außer im Falle $l=2$ nicht gelungen.

Die in den Bedingungen bei (4.), (4a.) für α und β auftretenden Forderungen: $\equiv 1$ lassen sich ersichtlich durch die allgemeineren: *kongruent einer zu l primen rationalen Zahl* ersetzen, wenn nur in den Exponenten von ζ dann α^{l-1} und β^{l-1} und in (4a.) links $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}$ geschrieben wird. In dieser Form

$$(4c.)\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{\alpha^{l-1}-1}{l}\cdot\frac{\beta^{l-1}-1}{\lambda_0}\right)},\ \text{wenn } \alpha,\beta \text{ prim zu } l, \text{ zueinander und } \left\{\begin{matrix}\alpha\equiv a \bmod. l\\ \beta\equiv b \bmod. \mathfrak{l}_0\end{matrix}\right\},$$

ist (4.) eine unmittelbare Verallgemeinerung des bekannten *Eisenstein*schen Reziprozitätsgesetzes in k_ζ (für ungerades l). Für diesen Körper spezialisiert wird nämlich (4c.), wenn $\alpha=a$ eine zu l prime rationale Zahl und

$$\beta = b_0 + b_1\lambda_0 + b_2\lambda_0^2 + \cdots + b_{l-2}\lambda_0^{l-2};\quad (b_0, l)=1$$

eine zu l prime Zahl aus k_ζ bedeutet:

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{a}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{a^{l-1}-1}{l}\cdot\frac{\beta^{l-1}-1}{\lambda_0}\right)} = \zeta^{\frac{a^{l-1}-1}{l}\cdot S\left(\frac{b_0^{l-1}+(l-1)\,b_0^{l-2}b_1\lambda_0+\cdots-1}{\lambda_0}\right)}$$

$$= \zeta^{\frac{a^{l-1}-1}{l}\cdot S\left(\frac{b_0^{l-1}-1}{\lambda_0}-b_0^{l-2}b_1\right)} = \zeta^{\frac{a^{l-1}-1}{l}\cdot S\left(-b_0^{l-2}b_1\right)} = \zeta^{\frac{a^{l-1}-1}{l}\,b_0^{l-2}b_1},$$

ein schon von *Eisenstein* gefundenes Resultat [1]), das für semiprimäres β, d. h. $b_1\equiv 0 \bmod. l$, übergeht in

---

[1]) *Eisenstein*, Über ein einfaches Mittel zur Auffindung der höheren Reziprozitätsgesetze. dieses Journ. Bd. 39, S. 361. Es muß an jener Stelle wohl $\alpha_1=\frac{A'(1)}{A(1)}$ heißen, da der Exponent α_1 von A (unser β) in der Darstellung $A=b_0(1-\lambda_0)^{\alpha_1}(1-\lambda_0^2)^{\alpha_2}\ldots$ sich aus $A=A(\zeta)=b_0+b_1\lambda_0+\cdots$ zu $\alpha_1\equiv -\frac{b_1}{b_0}\equiv\frac{A'(1)}{A(1)} \bmod. l$ ergibt. Damit folgt die Identität mit meiner Formel unmittelbar.

$\left(\frac{a}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{a}\right)^{-1} = 1$, wenn a rational, prim zu l und β semiprimär, prim zu a,

d. h. die unter dem Namen *Eisensteinsches Reziprozitätsgesetz* bekannte Formel. Die eigentümliche Unsymmetrie in diesem Gesetz bezüglich der Bedingungen für α und β findet sich auch in meiner Verallgemeinerung (4.), wo α einer Bedingung mod. l, β einer solchen nur mod. $\mathfrak{l}_0$ genügen muß, und erscheint somit als in der Natur der Sache liegend.

(4a.) ist ersichtlich nichts Neues, da man für $\alpha \equiv 1 \bmod l$ leicht

$$S\left(\frac{\alpha - 1}{l}\right) \equiv \frac{N(\alpha) - 1}{l} \bmod l$$

nachweist [1]), und andererseits aus der Definition des Symbols $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)$ sofort

$$\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{\frac{N(\alpha)-1}{l}}$$

folgt (k ist für ungerades l total imaginär, also $N(\alpha)$ positiv, für $l = 2$ sollte α total positiv sein). Ich habe jedoch (4a.) in dieser Gestalt und auch (4b.) besonders hervorgehoben wegen der unmittelbar ins Auge springenden Analogie zum gewöhnlichen quadratischen Reziprozitätsgesetz im rationalen Körper und seinen beiden Ergänzungssätzen. In der Tat gehen jene Formeln für $l = 2$ und den rationalen Grundkörper über in [2]):

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\cdot\frac{b-1}{2}}, \text{ wenn } (a, b) = 1 \text{ und } \left\{\begin{matrix} a \equiv 1 \bmod 2 \\ b \equiv 1 \bmod 2 \end{matrix}\right\};$$

$$\left(\frac{-1}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \text{ wenn } a \equiv 1 \bmod 2;$$

$$\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}}, \text{ wenn } a \equiv 1 \bmod 4;$$

also bis auf den nicht ganz vollständigen zweiten Ergänzungssatz in das bekannte quadratische Reziprozitätsgesetz für das *Jacobi-Legendre*sche Symbol.

Beweis für (4.) und (4a.).

Sei wie in meinen früheren Arbeiten $\mathfrak{l}$ ein Primteiler von l in k der Ordnung e vom Grade f, λ eine Primzahl für $\mathfrak{l}$ aus $k(\mathfrak{l})$ und

$$-l = \lambda^e \omega^g \eta\,(\mathfrak{l}),$$

wo ω eine primitive $(l^f - 1)$-te Einheitswurzel aus $k(\mathfrak{l})$ und η eine Einseinheit aus $k(\mathfrak{l})$ bezeichnet. Ferner seien mit $S_{\mathfrak{l}}$, $N_{\mathfrak{l}}$ Spur und Norm im Körper $k(\mathfrak{l})$ und mit $s_{\mathfrak{l}}$, $n_{\mathfrak{l}}$ Spur und Norm in dem zu $k(\mathfrak{l})$ gehörigen Koeffizientenkörper f-ten Grades (Körper von ω über dem rationalen l-adischen Körper) bezeichnet.

Ich betrachte dann Einseinheiten α, β aus $k(\mathfrak{l})$ von zwei bestimmten, zu l primen und zueinander „komplementären" Graden h und $h' = \frac{el}{l-1} - h$:

---

[1]) Siehe unten, S. 199 f.

[2]) Es werde an die Voraussetzung $a > 0$ für $l = 2$ erinnert.

$$\alpha = 1 + u\lambda^h \quad (\mathfrak{l}),$$
$$\beta = 1 + v\lambda^{h'} \quad (\mathfrak{l}).$$

Nach den Ausführungen von Z. V., Gl. (9.), ergibt sich ohne weiteres, daß das Symbol $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)$ für solche α, β dann und nur dann gleich 1 ist, wenn die Kongruenz

$$s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv 0 \mod l$$

besteht. Denn dann und nur dann erfordert α bei der Darstellung durch das zu $k(\mathfrak{l}; \sqrt[l]{\beta})$ im Sinne von H. H., S. 267, gehörige, für den Normenrestcharakter der Zahlen α maßgebende Fundamentalsystem, dessen „kritische Einseinheit" vom Grade $h = \frac{el}{l-1} - h'$ nicht. Dies gilt offensichtlich a fortiori auch in dem Falle, daß α oder β oder beide von höherem als dem h-ten bzw. h'-ten Grade sind, also u bzw. v durch $\mathfrak{l}$ teilbar sind, da dann $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ und $s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv 0 \mod l$ ist.

Sind demnach

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= 1 + u_i\lambda^h \\ \beta_i &= 1 + v_i\lambda^{h'} \end{aligned}\right\}; \quad (i = 1, 2, \ldots, f)$$

Basissysteme von je f Einseinheiten für die Grade h und h' und

$$\alpha = \alpha_1^{x_1} \ldots \alpha_f^{x_f}\, \xi; \quad (0 \leqq x_i \leqq l-1; \quad \xi \equiv 1 \mod \mathfrak{l}^{h+1})$$
$$\beta = \beta_1^{y_1} \ldots \beta_f^{y_f}\, \eta; \quad (0 \leqq y_i \leqq l-1; \quad \eta \equiv 1 \mod \mathfrak{l}^{h'+1}),$$

die Darstellungen irgendzweier α, β der angegebenen Beschaffenheit durch diese Basissysteme, also

$$u \equiv u_1 x_1 + \cdots + u_f x_f \mod \mathfrak{l},$$
$$v \equiv v_1 y_1 + \cdots + v_f y_f \mod \mathfrak{l},$$

so hat der Ausdruck

$$s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(u_1x_1 + \cdots + u_fx_f)(v_1y_1 + \cdots + v_fy_f)}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right)$$
$$\equiv \sum_{i,j=1}^{f} x_i y_j s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{u_i v_j}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv \sum_{i,j=1}^{f} b_{ij} x_i y_j \equiv M_0(x/y) \mod l$$

die Eigenschaft, für alle und nur die Exponentensysteme $x_i, y_j \bmod l$ zu verschwinden, denen α, β mit $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ entsprechen. Nach einem entsprechenden Schluß wie in H. N. R. Satz 3 ist also die Bilinearform $M_0(x/y)$ bis auf einen konstanten Faktor mit der nach H. N. R., S. 188, 4.), existierenden, den beiden komplementären Graden h, h' zugeordneten Bilinearform $L_0(x/y)$ identisch, für die

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{L_0(x/y)}$$

gilt, so daß demnach

$$(5.) \qquad \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{c\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right)}$$

mit einem für alle genannten α, β festen $c \not\equiv 0 \bmod. l$ gesetzt werden kann. Dabei ist ζ eine ein für allemal festgewählte, primitive l-te Einheitswurzel, die im folgenden stets für die Darstellung der Potenz- und Normenrestcharaktere zugrundegelegt wird.

Der Exponent rechts in (5.) läßt sich in folgender Weise ausdrücken:

$$\frac{uv}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\lambda^{h+h'}\omega^{\frac{gl}{l-1}}} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\lambda^{\frac{el}{l-1}}\omega^{\frac{gl}{l-1}}} \equiv \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(-l)\cdot\sqrt[l-1]{-l}} \bmod. \mathfrak{l}.$$

Nun folgt aus

$$l = (1-\zeta)(1-\zeta^2)\ldots(1-\zeta^{l-1}) = (1-\zeta)^{l-1}\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{l-1},$$

wo die Einheit

$$\varepsilon_i = \frac{1-\varrho^i}{1-\varrho} = 1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{i-1} \equiv i \bmod. \mathfrak{l}_0$$

ist, daß

$$l \equiv (1-\zeta)^{l-1}\, 1\cdot 2\ldots(l-1) \equiv -(1-\zeta)^{l-1} \bmod. \mathfrak{l}_0^l$$

ist. Daraus ergibt sich, daß die in $k(\mathfrak{l})$ stets vorhandene

$$\sqrt[l-1]{-l} \equiv c'(1-\zeta) \equiv c'\lambda_0 \bmod. \mathfrak{l}_0\mathfrak{l}$$

ist, wo c' eine naturgemäß nicht näher bestimmbare, mod. l von Null verschiedene, rationale Konstante ist, so daß

$$\frac{uv}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}} \equiv -\frac{1}{c'}\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{l\lambda_0} \bmod. \mathfrak{l}$$

und somit

$$s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{uv}{\omega^{\frac{gl}{l-1}}}\right) \equiv -\frac{1}{c'}\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{l\lambda_0}\right) \bmod. l$$

ist. Daher wird (5.) schließlich zu

$$(6.) \qquad \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{-\frac{c}{c'}s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{l\lambda_0}\right)} = \zeta^{c''\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{l\lambda_0}\right)}; \quad (c'' \not\equiv 0 \bmod. l),$$

so daß also der vorher in $\sqrt[l-1]{-l}$ steckende, unbestimmte rationale Zahlfaktor c' in die nunmehr allein noch zu bestimmende Konstante c'' hineingezogen ist. Gleichzeitig ist durch das Hereinschaffen eines bestimmten $\zeta = 1-\lambda_0$ in den Exponenten [1]) und Eliminierung aller noch willkürlicher Wahl unterworfenen Elemente aus demselben die Brücke geschaffen, um mittels des *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetzes (1.) die Konstante c'' zu bestimmen. Hierzu hat man nämlich jetzt nur ein spezielles Paar α, β einzusetzen und die linke Seite von (6.) auf Grund von (1.) auszurechnen.

---

[1]) nämlich desselben, das als Basis benutzt wird.

Ich führe dies in dem mir bisher allein zugänglichen Falle $h = e$, $h' = \frac{e}{l-1}$ aus, indem ich vorläufig e (und damit $\frac{e}{l-1}$) prim zu l voraussetze. α und β können dann in der Gestalt

$$\alpha = 1 + ul$$
$$\beta = 1 + v\lambda_0$$

angesetzt werden. Ich wähle speziell $v = -1$, also $\beta = \zeta$ und bestimme zunächst eine zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl u' aus k so, daß

$$s_{\mathfrak{l}}(u') \not\equiv 0 \mod l$$

ist. Weiter wähle ich dann das Hauptglied u von α als Zahl aus k so, daß

$$(7.) \qquad \alpha = \pi = 1 + ul \equiv 1 + u'l \mod \mathfrak{l}^{\frac{el}{l-1}+1},$$
$$(8.) \qquad \alpha = \pi = 1 + ul \equiv 1 \mod \mathfrak{l}_i^N; \quad (N \text{ hinreichend groß})$$

wird, wo $\mathfrak{l}_i$ jeden anderen Primteiler von l außer $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1$ bezeichnet, und π eine (total positive) Primzahl für ein Haupt- und Primideal $\mathfrak{p}$ ersten Grades aus k, also $N(\pi) = N(\mathfrak{p}) = p$ eine positive rationale Primzahl ist. Dies ist nach dem bekannten Satz von der arithmetischen Progression stets möglich. Aus (7.) folgt speziell $u \equiv u' \mod \mathfrak{l}$, also auch

$$s_{\mathfrak{l}}(u) \not\equiv 0 \mod l.$$

(6.) angewendet auf die beiden so erhaltenen Zahlen

$$\alpha = \pi = 1 + ul,$$
$$\beta = \zeta = 1 + (-1)\lambda_0,$$

liefert

$$\left(\frac{\pi, \zeta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{c'' s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\pi-1)(\zeta-1)}{l\lambda_0}\right)} = \zeta^{-c'' s_{\mathfrak{l}}(u)}.$$

Ferner folgt aus (8.):

$$\left(\frac{\pi, \zeta}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1, \text{ wenn } N \text{ hinreichend groß,}$$

und da π und ζ zu allen zu l primen, von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primteilern $\mathfrak{q}$ prim sind,

$$\left(\frac{\pi, \zeta}{\mathfrak{q}}\right) = 1.$$

Schließlich ist

$$\left(\frac{\pi, \zeta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = \zeta^{-\frac{N(\mathfrak{p})-1}{l}} = \zeta^{-\frac{N(\pi)-1}{l}}.$$

Aus (1.) folgt also:

$$(9.) \qquad \frac{N(\pi)-1}{\mathfrak{l}} + c'' s_{\mathfrak{l}}(u) \equiv 0 \mod l.$$

Nun ist

$$N(\pi) = N_{\mathfrak{l}_1}(\pi)\, N_{\mathfrak{l}_2}(\pi) \ldots N_{\mathfrak{l}_z}(\pi) \quad (l),$$

ferner nach (8.):

$$N_{\mathfrak{l}_i}(\pi) \equiv 1 \mod l^{N'},$$

wo N' mit N beliebig groß wird, also jedenfalls $N' \geqq 2$ angenommen werden darf, daher

$$N(\pi) \equiv N_{\mathfrak{l}_i}(\pi) = N_{\mathfrak{l}}(\pi) \mod l^2.$$

Weiter ist $N_{\mathfrak{l}}(\pi)$ das Produkt von $\pi = 1 + ul$ mit seinen ef konjugierten in $k(\mathfrak{l})$. Die f konjugierten zu u im Koeffizientenkörper sind mod. $\mathfrak{l}$ kongruent $u, u^l, \ldots, u^{l^{f-1}}$, und die sämtlichen ef konjugierten zu u in $k(\mathfrak{l})$ zerfallen in f Gruppen von je e zu $u, u^l, \ldots, u^{l^{f-1}}$ mod. $\mathfrak{l}$ kongruenten. Es ist daher

$$\begin{aligned} N(\pi) \equiv N_{\mathfrak{l}}(\pi) &\equiv [n_{\mathfrak{l}}(\pi)]^e \equiv [(1 + ul)(1 + u^l l) \ldots (1 + u^{l^{f-1}} l)]^e \mod l\mathfrak{l} \\ &\equiv [1 + l s_{\mathfrak{l}}(u)]^e \equiv 1 + e s_{\mathfrak{l}}(u) l \mod l\mathfrak{l}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{N(\pi) - 1}{l} \equiv e s_{\mathfrak{l}}(u) \mod \mathfrak{l}, \text{ also mod. } l.$$

Somit ergibt sich aus (9.) wegen $s_{\mathfrak{l}}(u) \not\equiv 0 \mod l$:

$$c'' \equiv -e \mod l$$

und daher nach (6.) allgemein für zu l primes e und $\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{l}^e$, $\beta \equiv 1 \mod \mathfrak{l}^{\frac{e}{l-1}}$ aus k:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{-e\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{l\, l_0}\right)} = \zeta^{-S_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{l\, l_0}\right)}, \tag{10.}$$

da allgemein

$$S_{\mathfrak{l}}(\gamma) \equiv e s_{\mathfrak{l}}(\gamma) \mod \mathfrak{l}, \text{ also mod. } l \tag{11.}$$

für ganzes γ aus $k(\mathfrak{l})$ gilt.

Die Formel (10.) gilt aber auch dann, wenn e durch l teilbar ist, da dann einerseits nach (11.) $S_{\mathfrak{l}}$ stets durch l teilbar, andererseits α und β sich in die Form setzen lassen

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi\, \alpha_0^l \ (\mathfrak{l}), \\ \beta &= \eta\, \beta_0^l \ (\mathfrak{l}), \end{aligned}$$

wo ξ, η Einseinheiten aus $k(\mathfrak{l})$ mindestens von den Graden $e + 1$, $\frac{e}{l-1} + 1$ sind, so daß wegen $(e + 1) + \left(\frac{e}{l-1} + 1\right) > \frac{el}{l-1}$ sicher

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\xi, \eta}{\mathfrak{l}}\right) = 1$$

wird [1]).

Erfüllen nunmehr α, β die gemachten Voraussetzungen für alle Teiler $\mathfrak{l}_i$ von l, d. h. ist

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv 1 \mod l, \\ \beta &\equiv 1 \mod \mathfrak{l}_0, \end{aligned}$$

so folgt, wenn $\mathfrak{p}$ alle zu l primen Primteiler von k durchläuft:

[1]) Siehe Z. V., Gl. (5).

$$1 = \prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}_i}\right) = \prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\zeta^{-\sum_{i=1}^{z} s_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{\alpha-1}{l}\cdot\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)}$$

$$= \prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\zeta^{-s\left(\frac{\alpha-1}{l}\cdot\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)},$$

da die Summe aller $S_{\mathfrak{l}_i}$ für den Bereich von l gleich der gewöhnlichen Spur S in k ist. Folglich gilt für noch zueinander prime α, β der angegebenen Kongruenzeigenschaften die zu beweisende Relation (4.):

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{s\left(\frac{\alpha-1}{l}\cdot\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)}$$

und speziell für $\beta = \zeta = 1 - \lambda_0$, $\alpha \equiv 1 \bmod. l$ die Relation (4a.):

$$\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{s\left(\frac{\alpha-1}{l}\right)}.$$

Im Falle $l = 2$ lassen sich die Betrachtungen noch etwas weiterführen. Da nämlich dann nur ein einziger Normennichtrestcharakter -1 existiert, ist die auf tiefergehende Betrachtungen gestützte Bestimmung der obigen Konstanten c'' hier nicht notwendig. Es ist a fortiori $c'' = 1$, und man hat aus (6.):

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}\right)}$$

für α, β die den Bedingungen

$$(12.) \qquad \left\{\begin{matrix}\alpha \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}^h \\ \beta \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}^{h'}\end{matrix}\right\};\ h + h' = 2e$$

genügen. Wenn e ungerade ist, darf hier $s_{\mathfrak{l}}$ durch $S_{\mathfrak{l}}$ ersetzt werden. Also folgt für Grundkörper k, in denen 2 keinen Primfaktor gerader Ordnung enthält, das quadratische Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = (-1)^{s\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}\right)}$$

für irgendzwei den Bedingungen (12.) genügende, zueinander prime α, β (α total positiv, sonst noch Vorzeichenfaktoren!).

Für beliebige Grundkörper läßt sich jedoch unter den allgemeineren Voraussetzungen (12.) für α, β nur aussagen:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{z} s_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}\right)},$$

so daß also zur Bestimmung des sogenannten „Umkehrfaktors" nicht allein die Kenntnis der Hauptgleichung für $\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}$ in k ausreicht, sondern die „Hauptkongruenzen" für jeden Modul $\mathfrak{l}_i$ benötigt werden, um die $s_{\mathfrak{l}_i}$ aus ihnen abzulesen; man muß dann also Kenntnis von der Zerlegung von l in k haben.

Speziell folgt übrigens für $\alpha = \beta = -1$ aus (10.) für $l = 2$:

$$\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{l}}\right) = (-1)^{s_{\mathfrak{l}}(1)} = (-1)^{e'},$$

wie ich es in einer früheren Arbeit behauptet hatte [1]).

Beweis für (4 b.).

Ist λ irgendeine Primzahl für $\mathfrak{l}$ und $\alpha = 1 + u l \lambda_0$ eine Einseinheit vom Grade $\frac{e\,l}{l-1}$ aus $k(\mathfrak{l})$, die sich durch ein Fundamentalsystem für $k(\mathfrak{l})$ mit der „ausgezeichneten" Einseinheit $\eta_a = 1 + w l \lambda_0$; $(s_{\mathfrak{l}}(w) \not\equiv 0 \mod l)$ so darstellt:

$$\alpha = \eta_a^x \xi^l(\mathfrak{l}); \quad (0 \leqq x \leqq l-1),$$

so ist nach den Ausführungen von Z. V.:

$$\left(\frac{\lambda^y, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\lambda, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right)^{yx} = \zeta^{cyx},$$

wo c aus $\left(\frac{\lambda, \eta_a}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^c$ eine vorläufig unbestimmte Konstante $\not\equiv 0 \mod l$ ist. Der Ausdruck

$$s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha - 1}{l\lambda_0}\right) = s_{\mathfrak{l}}(u)$$

ist, da

$$u \equiv x w + \bar{w} \quad \text{mit} \quad s_{\mathfrak{l}}(\bar{w}) \equiv 0 \mod l$$

ist,

$$s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha - 1}{l\lambda_0}\right) \equiv x\, s_{\mathfrak{l}}(w) \equiv x c'; \qquad (c' \not\equiv 0 \mod l),$$

so daß

$$\left(\frac{\lambda^y, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{\frac{c}{c'} y\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{l\lambda_0}\right)} = \zeta^{c'' y\, s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{l\lambda_0}\right)} \tag{12.}$$

gesetzt werden kann, wo $c'' \not\equiv 0 \mod l$ eine vorläufig unbestimmte, für alle in Frage kommenden α feste Konstante ist.

Für $l = 2$ ist a fortiori $c'' \equiv 1 \mod 2$. Um c'' auch für ungerades l in gewissen Fällen zu bestimmen, betrachte ich unter der zunächst zu machenden Annahme $e \not\equiv 0 \mod l$ die Darstellung von l durch ein Fundamentalsystem für $k(\mathfrak{l})$:

$$l = \lambda^e \eta_1^{e_1} \ldots \eta_m^{e_m} \eta_a^{e_{m+1}} \xi^l \quad (\mathfrak{l}).$$

Wegen $(e, l) = 1$ können hierin die $\eta_1^{e_1}, \ldots, \eta_a^{e_{m+1}}$ als e-te Potenzen von Einheiten aus $k(\mathfrak{l})$ geschrieben werden, so daß unter Einführung einer neuen Primzahl λ'

$$l = \lambda'^e \xi^l \quad (\mathfrak{l})$$

geschrieben werden kann. Daher gilt für die vorhin betrachteten $\alpha = 1 + u l \lambda_0$:

$$\left(\frac{l, \alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^{e c'' s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{l\lambda_0}\right)}. \tag{13.}$$

---

[1]) Siehe die a. S. 192 Anm. 2 zitierte Arbeit, S. 127.

c'' bestimmt sich dann auf Grund des *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetzes (1.). Dazu wähle ich das Hauptglied u von α als ganze Zahl aus k so, daß

$$s_{\mathfrak{l}}(u) \not\equiv 0 \bmod l \tag{14.}$$

$$u \equiv 0 \bmod \mathfrak{l}_i^N; \quad (N \text{ hinreichend groß}) \tag{15.}$$

wird, wobei wieder $\mathfrak{l}_i$ alle übrigen Teiler von l außer $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}$ bezeichnet. Dies ist natürlich stets möglich. Dann wird nach dem *Hilbert*schen Reziprozitätsgesetz (1.)

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right) = \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\alpha, l}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{\alpha, l}{\mathfrak{l}_1}\right) = \zeta^{-e\,c''\,s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{l\lambda_0}\right)}, \tag{16.}$$

wenn nur N in (15.) hinreichend groß ist.

Das Symbol $\left(\frac{l}{\alpha}\right)$ läßt sich nun unter Verwendung einer im Prinzip von Herrn *E. Artin* herrührenden Schlußweise [1]) folgendermaßen bestimmen:

Es ist $\left(\frac{u\zeta}{\alpha}\right) = 1$. Denn aus (4a.) folgt einerseits $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = 1$; andererseits ist wegen $\alpha = 1 + ul\lambda_0$ die ganze Zahl u aus k zu α prim und nach (14.) auch zu $\mathfrak{l}$, so daß, wenn

$$u = \mathfrak{u} \prod_{i=2}^{z} \mathfrak{l}_i^{a_i}$$

gesetzt wird,

$$1 = \prod_{\mathfrak{w}}\left(\frac{u, \alpha}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{u}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{z}\left(\frac{u, \alpha}{\mathfrak{l}_i}\right) = \left(\frac{u}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}}\right)^{-1},$$

da für $i = 2, \ldots, z$ für hinreichend großes N: $\left(\frac{u, \alpha}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1$ ist und, weil u prim zu $\mathfrak{l}$ und α Einseinheit vom Grade $\frac{el}{l-1}$, nach Z. V., Gl. (5.), auch $\left(\frac{\alpha, u}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ ist. Daher gilt

$$\left(\frac{u}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}}\right).$$

Wegen $\mathfrak{u}/u$ ist aber

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}}\right) = \left(\frac{1 + ul\lambda_0}{\mathfrak{u}}\right) = \left(\frac{1}{\mathfrak{u}}\right) = 1, \text{ also } \left(\frac{u}{\alpha}\right) = \left(\frac{u\zeta}{\alpha}\right) = 1.$$

Damit folgt weiter, daß

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right) = \left(\frac{ul\zeta}{\alpha}\right)$$

ist. Letzteres Symbol läßt sich weiter so berechnen:

$$\left(\frac{ul\zeta}{\alpha}\right) = \left(\frac{ul\zeta + \alpha}{\alpha}\right),$$

da der Wert des *Legendre*schen Symbols nur von der Restklasse abhängt, der sein „Zähler" mod. „Nenner" angehört. $ul\zeta + \alpha$ und α sind aber zwei zueinander

[1]) s. d. Anm. am Schluß der Arbeit.

und zu l prime Zahlen aus k und α primär, so daß schon nach dem speziellen Reziprozitätsgesetz (3.)

$$\left(\frac{ul\zeta+\alpha}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha}{ul\zeta+\alpha}\right)$$

ist. Durch erneute Anwendung des vorherigen Schlusses wird weiter

$$\left(\frac{\alpha}{ul\zeta+\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha-(ul\zeta+\alpha)}{ul\zeta+\alpha}\right)=\left(\frac{-ul\zeta}{ul\zeta+\alpha}\right)=\left(\frac{-ul\zeta}{1+ul}\right)=\left(\frac{-ul}{1+ul}\right)\left(\frac{\zeta}{1+ul}\right).$$

Nun ist

$$\left(\frac{-ul}{1+ul}\right)=\left(\frac{-ul+(1+ul)}{1+ul}\right)=\left(\frac{1}{1+ul}\right)=1,$$

$$\left(\frac{\zeta}{1+ul}\right)=\zeta^{\frac{|N(1+ul)|-1}{l}},$$

wobei $|N(1+ul)|=N(1+ul)$ ist, da für ungerades l der Körper k total imaginär ist. Wie oben ist weiter

$$\frac{N(1+ul)-1}{l}\equiv e s_{\mathfrak{l}}(u) \bmod. l,$$

so daß schließlich

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right)=\zeta^{e s_{\mathfrak{l}}(u)}=\zeta^{e s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)},$$

also nach (16.) wegen (14.):

$$c''\equiv -1 \bmod. l$$

wird. Daher gilt nunmehr nach (13.) allgemein für $e\not\equiv 0 \bmod. l$ und $\alpha=1+ul\lambda_0(\mathfrak{l})$, und für beliebiges l:

$$\left(\frac{l,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)=\zeta^{-e s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)}=\zeta^{-s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)}.$$

Für $e\equiv 0 \bmod. l$ gilt dies aber ebenfalls, da dann $l=\eta\xi^l(\mathfrak{l})$ sich von einer Einseinheit η aus $k(\mathfrak{l})$ nur um eine l-te Potenz aus $k(\mathfrak{l})$ unterscheidet, und dann nach Z. V., Gl. (5.) $\left(\frac{l,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)=\left(\frac{\eta,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)=1$ ist, andererseits auch die rechte Seite 1 wird. Daher folgt wie oben:

$$\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{l,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)=\zeta^{-s\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)}$$

und somit (4b.):

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right)=\zeta^{s\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)}, \text{ wenn } \alpha\equiv 1 \bmod. l\lambda_0.$$

Für $l=2$ kann man, ähnlich wie oben, aus (12a.) wegen $c''\equiv 1 \bmod. 2$ wieder etwas mehr schließen, nämlich

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)=(-1)^{\sum_{i=1}^{z} y_i s_{\mathfrak{l}_i}\left(\frac{a-1}{4}\right)}, \text{ wenn } (\lambda)=\mathfrak{l}_1^{y_1}\ldots\mathfrak{l}_z^{y_z}\cdot\mathfrak{a}^l \text{ und } \alpha\equiv 1 \bmod. 4.$$

Damit ist der Beweis für die ausgesprochenen Behauptungen (4.)—(4b.) vollständig erbracht.

Anmerkung zu S. 202.

Herr *E. Artin* teilte mir kürzlich ein einfaches Rekursionsverfahren mit, das gestattet, im Falle des quadratischen Reziprozitätsgesetzes im rationalen Körper und des kubischen im Kreiskörper k_ϱ der dritten Einheitswurzeln den zweiten Ergänzungssatz aus dem allgemeinen Gesetz zu erschließen, und somit andeutet, daß der in der *Hilbert-Furtwänglers*chen Theorie stets besonders schwer zu beweisende zweite Ergänzungssatz auch im allgemeinen Falle als nicht tieferliegend anzusehen ist, als das allgemeine Reziprozitätsgesetz und der erste Ergänzungssatz. In einer gemeinsamen Besprechung konnten wir dann dies Verfahren auf den Kreiskörper k_ζ der l-ten Einheitswurzeln übertragen. Des Interesses halber teile ich die einfachen Überlegungen, denen der Hauptschluß bei meinem obigen Beweise entnommen ist, hier mit:

I. Rationaler Grundkörper.

Voraussetzung: $\left(\frac{-1}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}$, wenn a ungerade positiv; $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)$, wenn a, b ungerade prim zueinander und a primär ($\equiv 1 \bmod 4$, positiv).

Sei a positiv ungerade. Dann ist:

$$\left(\frac{2}{a}\right) = \left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{-2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a-2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{a-2}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{2}{a-2}\right),$$

also

$$\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}+\frac{a-3}{2}+\cdots+1}\left(\frac{2}{1}\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}.$$

II. Grundkörper k_ϱ der dritten Einheitswurzeln.

Voraussetzung: $\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right) = \varrho^{\frac{N(\alpha)-1}{3}}$, wenn α prim zu 3; $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ wenn α, β prim zueinander und semiprimär.

Sei α ganz und semiprimär, d. h. von der Form

$$\alpha = a + 3b\varrho; \quad (a, b \text{ ganz rational}, a \text{ prim zu } 3).$$

Dann ist:

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{3\varrho}{\alpha}\right)$$

und

$$\left(\frac{3\varrho}{\alpha}\right) = \left(\frac{-3\varrho}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha-3\varrho}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-3\varrho}\right) = \left(\frac{3\varrho}{\alpha-3\varrho}\right) = \cdots = \left(\frac{3\varrho}{\alpha-3b\varrho}\right) = \left(\frac{3\varrho}{a}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{a}\right)\left(\frac{\varrho}{a}\right) = \left(\frac{\varrho}{a}\right),$$

weil $\left(\frac{3}{a}\right)$ seinem Konjugierten gleich, also 1 ist. Somit

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right)=\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\varrho}{a}\right)=\varrho^{-\frac{N(a)-1}{3}+\frac{a^2-1}{3}}=\varrho^{-\frac{a^2-3ab+9b^2-1}{3}+\frac{a^2-1}{3}},\ \text{also}$$

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right)=\varrho^{ab},\ \text{wenn}\ \alpha=a+3b\varrho\ \text{(semiprimär)}.$$

III. Grundkörper k_ζ der l-ten Einheitswurzeln.

Voraussetzung: $\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)=\zeta^{\frac{N(a)-1}{l}}$, wenn α prim zu l;

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, wenn α, β prim zueinander, zu l und kongruent rationalen Zahlen mod. l, was nach (4c.) für $l>2$ sicher richtig.

Sei α ganz, prim zu l und kongruent einer rationalen Zahl mod. l, d. h. von der Form

$$\alpha=a+l(b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_{l-1}\zeta^{l-1}),$$

wo $a, b_1, \ldots, b_{l-1}$ ganze rationale Zahlen und a prim zu l ist. Es werde

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right)=\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_{l-1})$$

gesetzt. Für Φ ergibt sich dann ähnlich wie vorher eine Rekursionsformel. Es ist nämlich

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right)=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{l\zeta}{\alpha}\right)=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{-l\zeta}{\alpha}\right)=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha-l\zeta}{\alpha}\right)=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{\alpha-l\zeta}\right)$$
$$=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{l\zeta}{\alpha-l\zeta}\right)=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha-l\zeta}\right)\left(\frac{l}{\alpha-l\zeta}\right),$$

also

$$\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_{l-1})=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha-l\zeta}\right)\Phi(b_1-1, b_2, \ldots, b_{l-1})$$

und wiederholt angewendet

$$\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_{l-1})=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha-lb_1\zeta}\right)\Phi(0, b_2, \ldots, b_{l-1}).$$

Durch die „konjugierten" Rekursionsformeln folgt weiter:

$$\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_{l-1})$$
$$=\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha-lb_1\zeta}\right)\left(\frac{\zeta^2}{\alpha-lb_1\zeta}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta^2}{\alpha-lb_1\zeta-lb_2\zeta^2}\right)\cdots\left(\frac{\zeta^{l-1}}{a+lb_{l-1}\zeta^{l-1}}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta^{l-1}}{a}\right),$$

da $\Phi(0, 0, \ldots, 0)=\left(\frac{l}{a}\right)$ seinen Konjugierten gleich, also 1 ist.

Ich bezeichne die sukzessiven „Nenner" der Reihe nach mit

$$\alpha_0=\alpha,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-2},\ \alpha_{l-1}=a.$$

Dann wird also

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right) = \left(\frac{\zeta}{\alpha_0}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right)^{-1}\cdots\left(\frac{\zeta}{\alpha_{l-2}}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha_{l-1}}\right)^{-1}.$$

Nun ist allgemein

$$\left(\frac{\zeta}{\alpha_i}\right) = \zeta^{\frac{N(\alpha_i)-1}{l}}$$

und

$$\frac{N(\alpha_0)-1}{l} \equiv \frac{a^{l-1}-1}{l} - a^{l-2}\sum_{i=1}^{l-1} b_i \mod l,$$

$$\frac{N(\alpha_1)-1}{l} \equiv \frac{a^{l-1}-1}{l} - a^{l-2}\sum_{i=2}^{l-1} b_i \mod l,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{N(\alpha_{l-2})-1}{l} \equiv \frac{a^{l-1}-1}{l} - a^{l-2}\sum_{i=l-1}^{l-1} b_i \mod l,$$

$$\frac{N(\alpha_{l-1})-1}{l} \equiv \frac{a^{l-1}-1}{l}.$$

Folglich wird

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right) = \zeta^{-\sum_{i=0}^{l-1}\frac{N(\alpha_i)-1}{l}} = \zeta^{-l\frac{a^{l-1}-1}{l} + a^{l-2}\left(\sum_{1}^{l-1} b_i + \sum_{2}^{l-1} b_i + \cdots\right)},$$

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right) = \zeta^{\frac{1}{a}\sum_{1}^{l-1} i b_i}. \tag{17.}$$

Dies Resultat ist die entsprechende Verallgemeinerung zu dem unter II. für k_ϱ erhaltenen (bekannten). In der Tat wird für $l = 3$

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \varrho^{a(b_1+2b_2)},$$

wenn $\alpha = a + 3(b_1\varrho + b_2\varrho^2) = a + 3(b_1 - b_2)\varrho - 3b_2$, also nach II.:

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \varrho^{(a-3b_2)(b_1-b_2)} = \varrho^{a(b_1+2b_2)}.$$

Allgemein läßt sich die erhaltene Formel (17.) noch etwas einfacher schreiben. Entwickelt man nämlich in

$$\alpha = a + l\sum_{i=1}^{l-1} b_i \zeta^i$$

den Koeffizienten von l nach steigenden Potenzen von $1 - \zeta = \lambda_0$, schreibt also

$$\alpha = a + l(c_0 + c_1\lambda_0 + \cdots + c_{l-2}\lambda_0^{l-2}),$$

so findet man leicht:

$$\sum_{i=1}^{l-1} i b_i \equiv c_1 \mod l,$$

also

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right) = \zeta^{-\frac{c_1}{a}}, \text{ wenn } \alpha \equiv a + c_1 l\lambda_0 \mod l\mathfrak{l}_0^2;\ a \text{ prim zu } l. \tag{18.}$$

Diese Formel ist ersichtlich allgemeiner als die durch Spezialisierung auf k_ζ aus (4b.) zu gewinnende

$$(19.) \qquad \left(\frac{l}{\alpha}\right) = \zeta^{-c_1}, \text{ wenn } \alpha \equiv 1 + c_1 l \lambda_0 \mod l\mathfrak{l}_0^2,$$

indem (18.) für beliebiges $\alpha \equiv$ rationaler, zu l primer Zahl mod. l gilt, (19.) jedoch nur für $\alpha \equiv 1 \mod l\mathfrak{l}_0$. Übrigens gilt (19.) auch schon für $\alpha \equiv 1 \mod l$, da der Koeffizient c_0 von l in die Formel (18.) nicht eingeht, kann aber dann natürlich nicht mehr in der Form (4b.) mit „Spur" im Exponenten geschrieben werden.

Über quadratische Nichtreste von der Form $8h+1$.

Von Herrn *C. Stengel* in München.

Die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste (mod. p) in dem Intervall $1, 2, 3, \ldots p-1$ wird durch eine Reihe von Sätzen geregelt, die bei *P. Bachmann*, Niedere Zahlentheorie I, S. 300—306 zusammengestellt sind; zu diesen Sätzen gesellen sich dann noch die von *L. Saalschütz* im Archiv f. M. Ph. (3) 9 (1905) angegebenen[1]).

[1]) Mit der Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste beschäftigen sich außer *Saalschütz* die folgenden seit dem Erscheinen von *Bachmanns* Niederer Zahlentheorie I (Leipzig 1902) veröffentlichten Abhandlungen:

1. *L. C. Kaprinski*: Über die Verteilung der quadratischen Reste (dieses Journal Bd. 127, 1904). Herr *Kaprinski* knüpft an *Gauß* an (De nexu usw.) und untersucht die Verteilung der Reste in den Oktanten, Zehnteln und Zwölfteln.

2. *E. Jacobsthal*: Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Dissertation. Berlin 1906. In Kapitel III wird auf Sequenzen von Resten und Nichtresten eingegangen und auf eine Abhandlung von *Daublesky von Sterneck* verwiesen. Für $p=8n+1$ werden „von einem gewissen p an" Vierersequenzen von Resten sichergestellt, für $p=8n+5$ ebensolche Sequenzen von Nichtresten. Könnte man Achtersequenzen von Nichtresten für jedes $p>19$ nachweisen, so würde die Behauptung des Textes zu einem bloßen Korollar werden.

3. *L. von Grosschmid*: Zur Theorie der quadratischen Reste (dieses Journal Bd. 145, 1914). Im wesentlichen wird die Erfüllung der Beziehung $\left(\frac{t}{p}\right)=\left(\frac{t+1}{p}\right)$ erörtert und gezeigt, wie man nach Bestimmung der Werte t die Reihen der Reste und Nichtreste sogleich hinschreiben kann.

Zu 1. und 3. kann auch auf die Abhandlung von *Chr. v. Staudt*: Über die Funktionen Y und Z, welche der Gleichung $4\,\frac{x^p-1}{x-1}=Y^2\mp pZ^2$ Genüge leisten, wo p eine Primzahl von der Form $4k\pm1$ ist (dieses Journal Bd. 67, 1867) verwiesen werden, wo in Nr. 33 von der Beziehung $\left(\frac{z}{p}\right)=\left(\frac{z+1}{p}\right)$ ausgehend die Anzahl der Folgen und Wechsel berechnet wird. Diese Abhandlung ist aber noch aus einem andern Grunde erwähnenswert. Sie enthält nämlich einen sehr überraschend wirkenden Beweis des Fundamentaltheorems (Nr. 25) sowie des sog. zweiten Ergänzungssatzes (Nr. 24). Auffallenderweise hat *Bachmann* diesen Beweis nicht in seine chronologische Übersicht (N. Z. Th. I, S. 203/4; vgl. des nämlichen Verfassers „Grundlehren", S. 53, Anm. *) aufgenommen, obwohl ihm die Abhandlung wohl bekannt war, wie das Zitat in seiner „Lehre von der Kreisteilung" S. 208, Anm. ***) ergibt; ist etwa *v. Staudts* Beweisführung auf ihre Schlüssigkeit hin angezweifelt worden?

Quadratische Nichtreste von der Form $8h+1$ sind ferner Gegenstand der Erörterung in den folgenden zwei in den Hamburger Mitteilungen, Band V, Heft 1 (Leipzig 1911) und Heft 8 (Leipzig 1920) abgedruckten neueren Abhandlungen bzw. Noten.

Im Nachfolgenden will ich mich nun mit den Nichtresten (mod. p) — p Primzahl und größer als 19 — beschäftigen, welche in dem obenbezeichneten Intervalle $1, 2, \ldots p-1$ liegen und die Form $8h+1$ haben. Erhebt man die ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \ldots [\sqrt{p}]$ zum Quadrat, so erhält man lauter Reste von der Form $8h+1$ und es wird daher die Anzahl der zwischen 0 und p gelegenen Nichtreste von der Form $8h+1$ von vornherein eingeschränkt, so daß z. B. für $p = 43, 59$ nur der einzige Nichtrest 33 von der Form $8h+1$ in dem Intervall $1, 2, 3, \ldots 42$ bzw. $1, 2, 3, \ldots 58$ existiert. Für einigermaßen große p freilich wird dieser Umstand keineswegs zu einer verhältnismäßig bedeutenden Verminderung der Nichtreste von der Form $8h+1$ führen und es erscheint daher für große p höchst unwahrscheinlich, daß in dem Intervall $1, 2, 3, \ldots p-1$ überhaupt gar kein Nichtrest (mod. p) von der Form $8h+1$ existieren sollte, während dies allerdings für $p = 11, 13, 17, 19$ der Fall ist; für $p = 3, 5, 7$ hat natürlich die Frage keinen Sinn. Nimmt man $p > 19$ in der Form $17K+b$ an, wo b einen Nichtrest (mod. 17) vorstellt, also eine der Zahlen 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, so gilt nach dem Reziprozitätsgesetz $\left(\frac{17}{p}\right) = \left(\frac{p}{17}\right) = -1$ und es existiert daher für alle primzahligen Moduln $p = 17K+b$ mindestens der eine Nichtrest 17 von der Form $8h+1$ in dem Intervall $1, 2, 3, \ldots p-1$. Aber für die primzahligen Moduln von der Form $17K+a$, wo a einen Rest (mod. 17) vorstellt, also eine der Zahlen 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16, läßt sich durch das Reziprozitätsgesetz keine Entscheidung herbeiführen und man wird daher einen andern Weg einzuschlagen haben, um die Vermutung, daß für $p > 19$ allemal Nichtreste von der Form $8h+1$ in dem Intervall $1, 2, 3, \ldots p-1$ existieren müssen, zu beweisen. Ich trenne die Untersuchung nach dem Kongruenzwert von p mod. 8 in die vier Abschnitte $p \equiv 3, 5, 7, 1 \bmod 8$.

1. $p = 8m+3$.

Angenommen, alle Zahlen

$$1, 9, 17, 25, \ldots 8m+1$$

seien lauter Reste (mod. p), so gilt das nämliche von den Zahlen

$$8m+4, 8m+12, 8m+20, \ldots 16m+4,$$

---

4. *H. Teege*: Über den *Legendre*schen Beweisversuch des sog. Reziprozitätsgesetzes in der Lehre von den quadratischen Resten und seine Vervollständigung durch den Nachweis, daß jede Primzahl von der Form $8n+1$ Nichtrest unendlich vieler Primzahlen von der Form $4n+3$ ist.

5. *W. Bock*: Zusatz zu dem Artikel 129 der Disquisitiones Arithmeticae von *Gauß*.

Hier handelt es sich aber nicht wie im Text um den Nachweis der Existenz von Nichtresten der bezeichneten Art, sondern vielmehr um den weit schwierigeren Nachweis der Existenz eines bzw. unendlich vieler primzahliger Moduln $\beta \equiv 3 \pmod 4$, für welche ein bestimmter Nichtrest von der Form $8n+1$ vorgegeben ist. Herr *Teege* bedient sich bei seiner Vervollständigung der bekanntlich in einem Punkte nicht einwandfreien Beweisführung *Legendres* (s. etwa die Übersetzung der dritten Auflage der Th. d. N. von *H. Maser*, I. Bd., Nr. 171, S. 234—237) der Hilfsmittel der analytischen Zahlentheorie, während Herr *Bock* mit elementareren Mitteln die von *Gauß* bestimmte Schranke für den Modul p von $2\sqrt{a}+1$ auf $\sqrt{a}$ herunterdrückt (a Nichtrest von der Form $8n+1$)

und also auch von den Zahlen

$$2m+1,\ 2m+3,\ 2m+5,\ldots 4m+1,$$

und wiederum von den Zahlen

$$10m+4,\ 10m+6,\ 10m+8,\ldots 12m+4.$$

Daher wären — + 2 Nichtrest! — die sämtlichen aufeinanderfolgenden Zahlen

(I.) $$5m+2,\ 5m+3,\ 5m+4,\ldots 6m+2$$

Nichtreste. Soll dies aber der Fall sein, so darf unter diesen $m+1$-Zahlen sich kein Quadrat befinden. Damit nun überhaupt unter den $m+1$ aufeinanderfolgenden Zahlen

$$z,\ z+1,\ z+2,\ldots z+m$$

kein Quadrat sich findet, darf erstens z selbst kein Quadrat sein, so daß also zu setzen ist

$$z=q^2+r\ (r=1,2,3,\ldots 2q),$$

und zweitens darf $z+m$ die Schranke $(q+1)^2$ nicht erreichen, d. h. es muß gelten

$$z+m\leqq q^2+2q,$$

also

$$r+m\leqq 2q.$$

Im vorliegenden Falle ist $z=5m+2$ als Nichtrest (mod. 5), also ganz abgesehen von der gemachten Annahme, sicher kein Quadrat; soll dann außerdem unter den Gliedern der Progression (I.) überhaupt kein Quadrat sich befinden, so muß die Bedingung erfüllt sein

$$5m+2=q^2+r,\ r+m\leqq 2q\ (r=1,2,3,\ldots 2q),$$

also

$$5r+5m\gtrless 10q,\ 5r+q^2+r-2\gtrless 10q,$$

d. i.

$$q^2-10q+6r\gtrless 2.$$

Für $q\leqq 10$ kann aber diese zweite Bedingung nicht erfüllt werden und folglich ist jedenfalls für $m\leqq 20$, also für $p\leqq 163$ unsere Annahme unzulässig, d. h. für alle primzahligen Moduln $p\leqq 163$ von der Form $8m+3$ gibt es Nichtreste von der Form $8h+1<p$. Besonders zu prüfen sind nur noch die primen Moduln 3, 11, 19, 43, 59, 67, 83, 107, 131, 139. Für $p=3$ hat aber unsere Behauptung überhaupt keinen Sinn, für $p=11$ und $p=19$ gilt sie nicht; für die übrigen p sind die kleinsten Nichtreste von der Form $8h+1$: 33, 33, 41, 57, 17, 17, 17[1]); die Behauptung ist also richtig für alle primen Moduln von der Form $8m+3>19$.

2. $\underline{p=8m+5.}$

Angenommen, alle Zahlen

$$1, 9, 17, 25,\ldots 8m+1$$

seien Reste (mod. p), so gilt das nämliche von sämtlichen Zahlen

$$8m+6,\ 8m+14,\ 8m+22,\ldots 16m+6;$$

---

[1]) Aus dem Can. Ar. von *Jacobi* unmittelbar zu entnehmen, indem die rechtsstehenden Täfelchen jeder Seite die Reste und Nichtreste (mod. p) sofort nach ihrer Größe geordnet ergeben.

folglich wären dann $- +2$ Nichtrest! — sämtliche Zahlen

$$4m+3,\ 4m+7,\ 4m+11, \ldots 8m+3$$

Nichtreste und folglich auch alle Zahlen

$$12m+8,\ 12m+12,\ 12m+16, \ldots 16m+8$$

und ebenso wieder alle Zahlen

(II.) $$3m+2,\ 3m+3,\ 3m+4, \ldots 4m+2.$$

Das erste Glied $z=3m+2$ dieser Progression ist als Nichtrest (mod. 3), also ganz abgesehen von der gemachten Annahme, sicher kein Quadrat; soll dann außerdem unter den Gliedern von (II.) überhaupt kein Quadrat sich befinden, so muß die Bedingung erfüllt sein

$$3m+2=q^2+r,\ r+m\leqq 2q\ (r=1, 2, 3, \ldots 2q),$$

also

$$3r+3m\leqq 6q,\ 3r+q^2+r-2\gtrless 6q,$$

d. i.

$$q^2-6q+4r\gtrless 2.$$

Für $q\leqq 6$ kann aber diese Bedingung nicht erfüllt werden und folglich ist jedenfalls für $m\leqq 12$, also für $p\leqq 101$ unsere Annahme unzulässig, d. h. für alle primzahligen Moduln $p\leqq 101$ von der Form $8m+5$ gibt es Nichtreste von der Form $8h+1<p$. Besonders zu prüfen sind nur noch die primen Moduln 5, 13, 29, 37, 53, 61. Für $p=5$ hat unsere Behauptung wieder keinen Sinn, für $p=13$ gilt sie nicht; die übrigen Moduln haben zu kleinsten Nichtresten von der Form $8h+1$: 17, 17, 33, 17; unsere Behauptung ist also richtig für alle primen Moduln von der Form $8m+5>13$.

3. $p=8m+7$.

Angenommen, alle Zahlen 1, 9, 17, 25, ..., $8m+1$ seien Reste (mod. p), so gilt das nämliche von den sämtlichen Zahlen

$$8m+8,\ 8m+16,\ 8m+24, \ldots 16m+8,$$

und mithin auch $- +2$ Rest! — von den sämtlichen Zahlen

$$m+1,\ m+2, m+3,\ \ldots 2m+1.$$

Daher sind $- -1$ Nichtrest! — sämtliche Zahlen

$$-m-1,\ -m-2,\ -m-3, \ldots -2m-1$$

Nichtreste und also auch sämtliche Zahlen

$$7m+6,\ 7m+5,\ 7m+4, \ldots 6m+6$$

oder

(III.) $$6m+6,\ 6m+7,\ 6m+8, \ldots 7m+6$$

lauter Nichtreste. Entweder ist nun $6m+6$ schon ein Quadrat — dies tritt ein für alle $m=6t^2-1$, also für alle primen Moduln p von der Form $48t^2-1$ — und dann ist $8m+1$ sicher ein Nichtrest, wie man erkennt, wenn man die obigen Schlüsse rückwärts vollzieht; denn dann ist $6m+6$ ein Rest, $-2m-1$ ebenfalls ein Rest, $2m+1$ Nichtrest, $16m+8$ Nichtrest, $8m+1$ desgleichen, und

es gibt also dann mindestens diesen einen Nichtrest von der Form $8h+1<p$. So ist z. B. für $t=2$: $m=23$, $p=191$ und $8m+1=185$ Nichtrest (mod. 191). Ist dagegen $z=6m+6$ kein Quadrat, so müssen, damit die Progression (III.) überhaupt kein Quadrat enthält, die Bedingungen erfüllt sein

$$6m+6=q^2+r,\ m+r\gtrless 2q\ (r=1,2,3,\ldots 2q),$$

also

$$6m+6r\gtrless 12q,\ q^2+r-6+6r\gtrless 12q,$$

d. i.

$$q^2-12q+7r\gtrless 6;$$

für $q\leqq 12$ kann aber diese Bedingung nicht erfüllt werden und folglich ist jedenfalls für $m\leqq 24$, also $p\leqq 199$ unsere Annahme unzulässig, d. h. für alle primen Moduln $p\leqq 199$ von der Form $8m+7$ gibt es Nichtreste von der Form $8h+1<p$. Besonders zu prüfen sind die primen Moduln 7, 23, 31, 47 [1]), 71, 79, 103, 127, 151, 167, 191 [1]). Für $p=7$ hat unsere Behauptung überhaupt keinen Sinn; für die übrigen Moduln p hat man als kleinste Nichtreste von der Form $8h+1$: 17, 17, 33, 17, 17, 57, 33, 33, 17, 33. Unsere Behauptung ist also richtig für alle primen Moduln p von der Form $8m+7>7$.

Eine durchaus verschiedene Beweisführung erfordern nun aber die Moduln p von der Form $8m+1$, und zwar aus dem Grunde, weil jetzt weder -1 noch ± 2 Nichtreste sind [2]).

4. $p=8m+1$.

Angenommen, alle Zahlen

$$1, 9, 17, 25, \ldots 8(m-1)+1=8m-7$$

seien Reste (mod. p), so wären auch $--1$ Rest! — die sämtlichen Zahlen

$$-1, -9, -17, -25, \ldots -8m+7$$

Reste und folglich auch sämtliche Zahlen

$$8m,\ 8m-8,\ 8m-16, \ldots 16, 8$$

und also auch $-+2$ Rest! — sämtliche Glieder der Progression

(R.) $$1, 2, 3, \ldots m-1, m.$$

Die Primzahlen p von der Form $8m+1$ gehören aber einer der acht linearen Formen an

$$96\nu+1, 96\nu+17, 96\nu+25, 96\nu+41, 96\nu+49, 96\nu+65, 96\nu+73, 96\nu+89,$$

und wir können also p in der Form ansetzen

$$p=96\nu+8\varrho+1=8(12\nu+\varrho)+1$$

mit $\varrho=0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11$ und $m=12\nu+\varrho$.

---

[1]) $p=47$ und 191 gehören übrigens zu dem oben erörterten Sonderfall.

[2]) Ein zweiter, recht instruktiver Beweis für die drei ersten Fälle beruht auf der Tatsache, daß eine Zahl nicht zugleich Rest und Nichtrest (mod. p) sein kann; er steht dem jetzt folgenden Beweis für die Moduln von der Form $8m+1$ näher, ist aber in der Durchführung weniger einfach als der im Text mitgeteilte.

Die Reste der laut Annahme festgestellten Progression (R.) schreiben wir jetzt etwas ausführlicher hin in der Folge

$$(\mathrm{R}'.)\quad 1, 2, 3, 4, \ldots 6\nu + s, \ldots 8\nu + t, \ldots 9\nu + u, \ldots 12\nu + \varrho,$$

wo s, t, u noch näher zu bestimmen sein werden, und durch Multiplikation mit den Resten 2, 3, 4 — 3 Rest laut Annahme! — erhalten wir hieraus die weiteren Reste

$$(R''.)\quad \begin{cases} 12\nu + 2s, 12\nu + 2s + 2, \ldots 24\nu + 2\varrho, \\ 24\nu + 3t, 24\nu + 3t + 3, \ldots 36\nu + 3\varrho, \\ 36\nu + 4u, 36\nu + 4u + 4, \ldots 48\nu + 4\varrho = \dfrac{p-1}{2}. \end{cases}$$

Damit nun die Gesamtheit $(R'.)$, $(R''.)$ aus lauter verschiedenen Resten bestehe, wählen wir unter der Voraussetzung $\nu \geqq 1$

für $\varrho = 0$:	$s = 1$,	$t = 1$,	$u = 1$,	$s + t + u = 3$,	$2\varrho + 3 = 3$;
2:	2	2	2	6	7
3:	2	3	3	8	9
5:	3	4	4	11	13
6:	4	5	5	14	15
8:	5	6	7	18	19
9:	5	7	8	20	21
11:	6	8	9	23	25.

Durch diesen Ansatz werden nämlich die für den eben bezeichneten Zweck notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt:

$$6\nu + s < 8\nu + t < 9\nu + u < 12\nu + \varrho$$

und

$$\varrho < 2s, 2\varrho < 3t, 3\varrho < 4u.$$

Dann erhalten wir unterhalb $\frac{1}{2}p$:

$$\begin{aligned} &12\nu + \varrho + \tfrac{1}{2}(24\nu + 2\varrho - 12\nu - 2s) + 1 + \tfrac{1}{3}(36\nu + 3\varrho - 24\nu - 3t) + 1 \\ &\qquad + \tfrac{1}{4}(48\nu + 4\varrho - 36\nu - 4u) + 1 \\ &= 12\nu + \varrho + 6\nu + \varrho - s + 4\nu + \varrho - t + 3\nu + \varrho - u + 3 \\ &= 24\nu + 2\varrho + \nu + [(2\varrho + 3) - (s + t + u)] \end{aligned}$$

verschiedene Reste. Da aber — vgl. *P. Bachmann* a. a. O., S. 300/1! — für $p = 8m + 1$ unterhalb $\frac{1}{2}p$: $\dfrac{p-1}{4} = 24\nu + 2\varrho$ Reste liegen, so ergäbe sich infolge unserer Annahme ein Überschuß von

$$D = \nu + [(2\varrho + 3) - (s + t + u)]$$

Resten, welcher Überschuß nach der obigen Tabelle stets einen der (positiven) Werte $\nu, \nu + 1, \nu + 2$ hätte. Also können auch für $p = 8m + 1 = 8(12\nu + \varrho) + 1$ nicht sämtliche Zahlen der Reihe $1, 9, 17, \ldots 8(m-1) + 1$ quadr. Reste (mod. p) sein, $\nu \geqq 1$ vorausgesetzt. Die durch letztere Einschränkung noch ausgeschlossenen primzahligen Moduln $p = 17, 41, 73, 89$ erledigen sich ohne weiteres; für $p = 17$ gilt ja der Satz überhaupt nicht und für die Moduln 41, 73, 89 hat man die kleinsten Nichtreste 17, 17, 33 von der Form $8h + 1$; für diese drei Moduln gilt also der Satz wieder.

Als Beispiel für diese Art der Überlegung diene der Fall

$$p = 937 = 8 \times 117 + 1 = 9 \times 96 + 9 \times 8 + 1$$

mit $m = 117$, $\nu = 9$, $\varrho = 9$, also $s = 5$, $t = 7$, $u = 8$. Die Reihe der 117 Reste $(R'.)$ würde dann lauten

$$(R'.) \qquad 1, 2, 3, 4, \ldots 59, \ldots 79, \ldots 89, \ldots 117;$$

durch Multiplikation mit den Resten 2, 3, 4 gewänne man dann die weiteren von den $(R'.)$ und unter sich verschiedenen Reste

$$(R''.) \qquad \begin{cases} 118, 120, 122, \ldots 234, \\ 237, 240, 243, \ldots 351, \\ 356, 360, 364, \ldots 468 = \dfrac{p-1}{2}, \end{cases}$$

also zusammen mit den Resten $(R'.)$:

$$117 + \frac{116}{2} + \frac{114}{3} + \frac{112}{4} + 3 = 117 + 58 + 38 + 28 + 3 = 244$$

Reste, während es doch nur $\dfrac{p-1}{4} = 234$ sein dürfen; den nämlichen Überschuß $D = 10$ liefert auch der Ausdruck $\nu + [(2\varrho + 3) - (s + t + u)] = 9 + (21 - 20)$. Daher können nicht alle Zahlen

$$1, 9, 17, 25, \ldots 921, 929$$

Reste (mod. 937) sein, und in der Tat ist schon 33 ein Nichtrest von der Form $8h + 1$.

Zur affinrationalen Geometrie.

Von Herrn *Werner Schmeidler* in Breslau.

Einleitung.

Zwei algebraische Gebilde im affinen m- bzw. n-dimensionalen Raum heißen *affinrational verwandt*, wenn ihre Punkte umkehrbar eindeutig vermöge ganz rationaler Transformationen aufeinander bezogen werden können. Die *affinrationale Geometrie* beschäftigt sich mit solchen Eigenschaften der algebraischen Gebilde, die allen affinrational verwandten Gebilden in gleicher Weise zukommen, also invariant sind gegenüber affinrationalen Transformationen.

Diese zur birationalen Geometrie eines algebraischen Gebildes vollkommen analoge Begriffsbestimmung ist ursprünglich nicht aus dem theoretischen Bedürfnis heraus entstanden, das (bislang noch fehlende) affine Gegenstück zur birationalen Theorie zu entwickeln, sondern hat sich von der Ausgestaltung der Lehre von den höheren komplexen Zahlen, also einem scheinbar ganz heterogenen Gebiete aus, von selbst herausgebildet. Wie die birationale Geometrie nämlich mit dem Körperbegriff, so hängt die affinrationale Geometrie mit dem Ringbegriff aufs engste zusammen, ihr Studium erscheint also als eine durchaus logische Weiterbildung der bisherigen geometrischen Forschungen. Geht man ferner vom Koeffizientenbereich aller komplexen Zahlen, wie er der affinen Geometrie zugrundeliegt, über zu einem beliebigen Körper als Grundbereich, so liefern entsprechende Gedankengänge eine vertiefte Behandlung der Systeme algebraischer Gleichungen, der unter anderem, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll, auch die Galoissche Theorie der Gleichungen mit einer Unbekannten untergeordnet werden kann.

Diese mannigfachen Beziehungen zu andern Gebieten der Mathematik scheinen es mir zu rechtfertigen, die selbständige Ausgestaltung der affinrationalen Geometrie in Angriff zu nehmen. In den folgenden Zeilen soll hierzu ein Beitrag gegeben werden, indem in Ausdehnung früherer Sätze über die Singularitäten algebraischer Gebilde [1]) gezeigt wird, daß der durch die Singularitätengruppen [2]) definierte „Charakter“ der Singularitäten eines algebraischen Gebildes nicht nur innerhalb eines Raumes von fester Variablenzahl, sondern auch unabhängig von

[1]) Vgl. die beiden Arbeiten dieses Titels in den Math. Annalen Bd. 81, S. 223—234 und Bd. 84, S. 303—320, im folgenden zitiert mit Sg. I und II.

[2]) Vgl. Sg. I § 1.

dieser einschränkenden Bedingung affinrational invariant ist, daß also z. B. ebene Kurven mit den zu ihnen affinrational verwandten Raumkurven im Charakter der Singularitäten übereinstimmen. Ferner wird die Auflösung der Singularitäten eines beliebigen algebraischen Gebildes, das nur endlich viele singuläre Punkte hat, soweit sie mit Hilfe von gewissen speziellen *Cremona*transformationen geleistet werden kann, analog der *M. Noether*schen Auflösung bei ebenen Kurven studiert und die affinrationale Invarianz der dabei entstehenden abgeleiteten Singularitätengruppen wenigstens innerhalb eines Raumes mit fester Variablenzahl dargetan. Vorweg geht die Aufstellung eines einfachen, aber für die Theorie grundlegenden Satzes, der die Verbindung der affinrationalen Geometrie mit der Theorie der Restgruppen zeigt.

Der Koeffizientenbereich ist im folgenden der Körper aller komplexen Zahlen oder ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper.

§ 1.

Im Raume der Variablen $x_1, \ldots, x_m$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$ sei je ein algebraisches Gebilde vorgelegt. Wir nennen die beiden Gebilde *affinrational verwandt*, wenn es Polynome $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$, $g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_m(y_1, \ldots, y_n)$ derart gibt, daß $f_1, \ldots, f_n$ eine Abbildung des ersten Gebildes auf das zweite, ebenso $g_1, \ldots, g_m$ eine Abbildung des zweiten Gebildes auf das erste liefert, und beide Abbildungen umkehrbar eindeutig und zueinander invers sind. In Formeln heißt dies: Es gibt zu jedem Punkt $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des ersten Gebildes umkehrbar eindeutig einen Punkt $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des zweiten Gebildes, so daß gleichzeitig die Beziehungen

$$(1.) \qquad \begin{aligned} f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) &= \beta_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ g_i(\beta_1, \ldots, \beta_n) &= \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

bestehen.

Jedes algebraische Gebilde ist nun das System aller Nullstellen eines gewissen Ideals [1]) aus Polynomen. Wir fragen: *In welcher Beziehung stehen die Ideale zueinander, wenn die zugehörigen Gebilde affinrational verwandt sind?*

Diese Frage ist insofern noch unbestimmt, als ja das Ideal durch das Gebilde nicht eindeutig definiert ist; wir präzisieren sie, indem wir jedem Gebilde das einfachst mögliche Ideal zuordnen, nämlich die Gesamtheit *aller* Polynome, die in dem betreffenden Gebilde verschwinden. Das Ideal ist dann als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Primidealen vor den übrigen Idealen mit denselben Nullstellen, seine Restgruppe als „Stammgruppe" vor den Restgruppen der übrigen Ideale ausgezeichnet [2]). Nennen wir zwei Ideale äquivalent, wenn ihre Restgruppen isomorph sind, so lautet die einfache Antwort auf unsere Frage:

---

[1]) Ich verwende nach dem Vorgange von Frl. *E. Noether* die Bezeichnung „Ideal" an Stelle von „Modul" aus Polynomen. Ein solches Ideal ist demgemäß ein System von Polynomen, in dem neben F auch AF für irgendein Polynom A und neben F_1 und F_2 auch $F_1 + F_2$ enthalten ist.

[2]) Vgl. für diese Begriffe meine Arbeit: Über die Zerlegung der Gruppe der Restklassen eines endlichen Moduls, Mathem. Zeitschr. Bd. 5, S. 222—267, § 2.

Satz I. *Zwei algebraische Gebilde sind dann und nur dann affinrational verwandt, wenn die zugehörigen Ideale äquivalent sind.*

Zum Beweise seien $\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$ die zu den beiden Gebilden gehörigen Ideale. Es ergibt sich nun aus (1.) durch Einsetzung der ersten Gleichung in die zweite:

$$g_i(f_1, \ldots, f_n) = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

wobei $f_1, \ldots, f_n$ die Werte an der Stelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ bedeuten; für die Polynome $f_1, \ldots, f_n$ in $x_1, \ldots, x_m$ gilt daher, daß $g_i(f_1, \ldots, f_n) - x_i$ an allen Nullstellen von $\mathfrak{M}$ gleich 0 ist, also zu $\mathfrak{M}$ gehört. Auf dieselbe Weise schließt man für irgendein Polynom $N(y_1, \ldots, y_n)$ von $\mathfrak{N}$, daß $N(f_1, \ldots, f_n)$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, und analog zeigt sich, daß $f_j(g_1, \ldots, g_m) - y_j$ und $M(g_1, \ldots, g_m)$ für irgendein M aus $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{N}$ gehört. Sind also $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ die Restklassen von $x_1, \ldots, x_m$ mod $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ die Restklassen von $y_1, \ldots, y_n$ mod $\mathfrak{N}$, so gelten die Relationen (wir schreiben kurz $f_1(\mathfrak{x})$ für $f_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ usw.):

$$(2.) \qquad \begin{matrix} M(g(\mathfrak{y})) = 0, & N(f(\mathfrak{x})) = 0, & \binom{i = 1, \ldots, m}{j = 1, \ldots, n} \\ f_j(g(\mathfrak{y})) = \mathfrak{y}_j, & g_i(f(\mathfrak{x})) = \mathfrak{x}_i, & \end{matrix}.$$

Diese Bedingungen sind aber nach Sg. I Satz I hinreichend für die Äquivalenz von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$.

Wenn umgekehrt $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ äquivalent sind, so liefert der zitierte Satz das Bestehen der Bedingungen (2.). Da alle Relationen für die Restklassen $\mathfrak{x}$ auch erfüllt sind für irgendeine Nullstelle α von $\mathfrak{M}$, so wird $N(f(\alpha)) = 0$, also $f(\alpha)$ eine Nullstelle β von $\mathfrak{N}$. Analog wird bewiesen, daß $g(\beta)$ eine Nullstelle α von $\mathfrak{M}$ ist. Wegen der Relationen der zweiten Zeile von (2.) ergibt sich der umkehrbar eindeutige und inverse Charakter der beiden Abbildungen. Demnach sind die beiden Gebilde affinrational verwandt.

Vermöge Satz I fällt die affinrationale Geometrie zusammen mit dem Studium der Restgruppen der zugehörigen Ideale. Beispiele von affinrationalen Invarianten bilden die Singularitätengruppen; in der Tat sind für zwei äquivalente Ideale $\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$ nach Sg. I Satz III wenigstens für $m = n$ die Ideale $\mathfrak{M}_r = (\mathfrak{M}, D_r)$ und $\mathfrak{N}_r = (\mathfrak{N}_1, T_r)$ für $1 \leqq r \leqq m$, deren Nullstellen, soweit $\mathfrak{M}_r \neq 1$ und $\neq \mathfrak{M}$ ist, die singulären Punkte r-ter Art von $\mathfrak{M}$ und analog von $\mathfrak{N}$ ergeben, ebenfalls zueinander äquivalent; ihre Restgruppen heißen die Singularitätengruppen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Wir wollen diesen Satz in folgender Weise auf den Fall $n > m$ ausdehnen:

Satz II′. *Sind $\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$ äquivalente Ideale und ist $n \geqq m$, so ist $\mathfrak{M}_r$ äquivalent zu $\mathfrak{N}_{n-m+r}$ $(1 \leqq r \leqq m)$, während die Ideale $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{n-m} = 1$ sind.*

In Sg. I sind die Nullstellen von $\mathfrak{M}_r$ als Singularitäten r-ter Art von $\mathfrak{M}$ bezeichnet; wir wollen sie hier als vom Index $m - r$ bezeichnen. Dann kann Satz II′ folgendermaßen formuliert werden:

Satz II. *Für irgend zwei affinrational verwandte Gebilde stimmt der Charakter ihrer Singularitäten von demselben Index überein, ist also eine affinrationale Invariante.*

Für $n = m$ ist Satz II′ a. a. O. bewiesen, wir setzen also $n > m$ voraus. Wir

gehen aus vom Ideal $\mathfrak{M}$ und konstruieren ein drittes zu $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ äquivalentes Ideal $\mathfrak{R}(z_1, \ldots, z_n)$, indem wir die Restklassen

$$\begin{aligned} h_1(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m) &= \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{z}_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_m(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m) &= \mathfrak{x}_m = \mathfrak{z}_m \\ h_{m+1}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m) &= \mathfrak{z}_{m+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_n(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m) &= \mathfrak{z}_n \end{aligned}$$

setzen; hierbei bedeuten $h_{m+1}, \ldots, h_n$ irgend welche Polynome. $\mathfrak{R}(z_1, \ldots, z_n)$ umfasse die Gesamtheit aller Polynome $\mathfrak{R}$, für die $\mathfrak{R}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n) = 0$ ist. Dann ist zunächst jedes Element der Restgruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ darstellbar; das Ideal $\mathfrak{R}(z_1, \ldots, z_n)$ ist demnach zu $\mathfrak{M}$ äquivalent. Wir behaupten nun die Gleichung

$$\mathfrak{R}(z_1, \ldots, z_n) = (\mathfrak{M}(z_1, \ldots, z_m), z_{m+1} - h_{m+1}(z_1, \ldots, z_m), \ldots, z_n - h_n(z_1, \ldots, z_m)).$$

In der Tat gehören erstens die Polynome in der Klammer rechts sämtlich zu $\mathfrak{R}$. Ferner ist jedes Polynom $\mathfrak{R}$, das von $z_1, \ldots, z_m$ allein abhängt, zu $\mathfrak{M}$ gehörig, weil $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller Relationen von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ umfaßt. Enthält aber ein Polynom aus $\mathfrak{R}$ außerdem auch noch die Variablen $z_{m+1}, \ldots, z_n$, so kann es mod $(z_{m+1} - h_{m+1}, \ldots, z_n - h_n)$ in ein solches umgeformt werden, das allein von $z_1, \ldots, z_m$ abhängt und wiederum zu $\mathfrak{R}$ gehört. — Am einfachsten setzt man $\mathfrak{R}(z_1, \ldots, z_n) = (\mathfrak{M}, z_{m+1}, \ldots, z_n)$.

Nun enthalten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ gleichviel Variable; der Satz wird also wegen Sg. I Satz III bewiesen sein, wenn gezeigt werden kann, daß $\mathfrak{M}_r$ zu $\mathfrak{R}_{n-m+r}$ äquivalent und $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{n-m} = 1$ ist.

Hierzu bedenken wir, daß $\mathfrak{M}_r$ aus $\mathfrak{M}$ durch Adjunktion aller r-reihigen Determinanten der Form

$$D_r = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial M_1}{\partial x_{\nu_1}} & \cdots & \dfrac{\partial M_1}{\partial x_{\nu_r}} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial M_r}{\partial x_{\nu_1}} & \cdots & \dfrac{\partial M_r}{\partial x_{\nu_r}} \end{vmatrix}$$

entsteht, und analog $\mathfrak{R}_s$ aus $\mathfrak{R}$.

Daß $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_1 = \cdots = \mathfrak{R}_{n-m} = 1$ ist, folgt ohne weiteres, weil gewisse der aus den Ableitungen von $z_{m+1}, \ldots, z_n$ in der obigen Weise gebildeten Determinanten für $s = 0, 1, \ldots, n - m$ gleich 1 sind. Aus demselben Grunde ist $D_r(z_1, \ldots, z_m) \equiv 0$ $(\mathfrak{R}_{n-m+r})$. Umgekehrt sei

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial R_1}{\partial z_{\mu_1}} & \cdots & \dfrac{\partial R_1}{\partial z_{\mu_s}} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial R_s}{\partial z_{\mu_1}} & \cdots & \dfrac{\partial R_s}{\partial z_{\mu_s}} \end{vmatrix} \qquad (s = n - m + r)$$

eine beliebige der Determinanten aus $\mathfrak{R}_s$. Wir haben zu zeigen, daß für $z_1 = x_1, \ldots, z_m = x_m$, $z_{m+1} = \cdots = z_n = 0$ sich ein Polynom aus $\mathfrak{M}_r$ ergibt. Sind zunächst

alle $R_1, \ldots, R_s$ zu $\mathfrak{M}(z_1, \ldots, z_m)$ gehörig, so ist dies wegen $s > r$ klar, ebenso wenn $R_1, \ldots, R_\varrho$ mit $\varrho \geqq r$ zu $\mathfrak{M}$ gehört. Ist aber $\varrho < r$, so genügt es nach Sg. I S. 226, den Fall zu betrachten, daß die Polynome $R_1, \ldots, R_s$ einer Basis von $\mathfrak{R}$ entnommen sind, von denen $R_{\varrho+1}, \ldots, R_s$ unter den $z_{m+1}, \ldots, z_n$ zu finden sind. Nun ist aber $s - \varrho = n - m + r - \varrho > n - m$, also tritt eines der letzteren mehrfach auf, die Determinante ist demnach 0. Hiermit ist die Äquivalenz von $\mathfrak{M}_r$ und $\mathfrak{R}_s$ auf Grund von Sg. I Satz I bewiesen und damit auch die Behauptung des Satzes II.

Betrachten wir beispielsweise eine zu einer ebenen Kurve $\mathfrak{M}(x_1, x_2)$ affinrational verwandte Raumkurve $\mathfrak{R}(y_1, y_2, y_3)$, so hat diese nach Satz II keine Singularitäten vom Index 2, sondern nur solche vom Index 1, und zwar in derselben Anzahl und von der durch die Restgruppe von $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$ charakterisierten Art. Projiziert man also z. B. eine Raumkurve auf eine Ebene und treten dabei „scheinbare" Doppelpunkte auf, so können die beiden Kurven nicht affinrational verwandt sein. Dagegen ist z. B. eine durch Zylinder und Monoid dargestellte Raumkurve affinrational verwandt mit einem beliebigen ebenen Schnitt des Zylinders; seien nämlich $F(x, y) = 0$, $z = 0$ die Gleichungen des ebenen Schnittes, $z - G(x, y)$ die des Monoids, so ist $\mathfrak{R} = (F, z - G)$ äquivalent mit $\mathfrak{M} = (F)$.

Zum Schluß sei bemerkt, daß Satz II in der Form II′ nicht auf den Fall eines kleinsten gemeinsamen Vielfachen von Primidealen und nicht auf den Grundbereich aller komplexen Zahlen beschränkt ist, sondern für beliebige Ideale und für einen beliebigen Körper von der Charakteristik 0 als Grundbereich gilt.

§ 2.

Wir wollen im folgenden den Fall weiter verfolgen, daß die sämtlichen Singularitätengruppen der Restgruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ endliche Gruppen sind; geometrisch bedeutet dies, daß das Gebilde von $\mathfrak{M}$ nur endlich viele singuläre Punkte besitzt, was alsdann wegen Satz II auch von allen affinrational verwandten Gebilden gilt. Als Beispiel denken wir etwa an eine irreduzible Raumkurve im n-dimensionalen Raum. Es soll nun analog der Auflösung der Singularitäten bei ebenen Kurven auch hier eine solche Auflösung wenigstens der Nullstellen von $\mathfrak{M}_1$ vermöge spezieller quadratischer *Cremona*transformationen studiert und der affinrational invariante Charakter der dabei entstehenden Folge von Singularitäten gezeigt werden. Das Resultat entspricht demjenigen von Sg. II und enthält dieses in sich; zugleich wird dabei eine im Abschnitt II dieser Arbeit versehentlich unerwähnt gelassene Voraussetzung nachgetragen.

$\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m)$ sei das gegebene Ideal des algebraischen Gebildes mit punktförmigen Singularitäten; wir bezeichnen das Gebilde selbst mit dem gleichen Buchstaben $\mathfrak{M}$. Ferner sei $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_m)$ ein Ideal derselben Art von derselben Variablenzahl, das mit $\mathfrak{M}$ durch folgende Beziehungen verbunden ist:

$$(1.)\begin{cases} M(g_1, \ldots, g_m) \equiv 0 & N(f_1, \ldots, f_m) \equiv 0 \\ M(g_1, \ldots, g_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{N}, (\mu)) & N(f_1, \ldots, f_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}, (\mu)) \end{cases}$$

$$(2.) \quad f_i(g_1, \ldots, g_m) \equiv y_i \qquad g_i(f_1, \ldots, f_m) \equiv x_i$$

$$(i = 1, \ldots, m).$$

Hierbei bedeuten M und N beliebige Polynome aus $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, (μ) das Ideal aller Polynome, die in jedem singulären Punkte von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ mindestens in der Vielfachheit $\mu > 1$ verschwinden [1]), endlich M und N ein beliebiges Polynom aus (μ). Wir setzen also im folgenden zunächst weniger als die Äquivalenz von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ voraus, nämlich nur die Äquivalenz von $(\mathfrak{M}, (\mu))$ und $(\mathfrak{N}, (\mu))$; über die Größe der ganzen Zahl μ werden wir noch verfügen [2]).

Aus (1.) folgt nun durch Differentiation und Elimination für irgend ein Polynom N_r aus $\mathfrak{N}_r$ (r sei so gewählt, daß $\mathfrak{N}_r \neq 1$ und $\neq \mathfrak{N}$ ist)

$$D^r \cdot N_r(f_1, \ldots, f_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}_r, (\mu - 1)),$$

wenn $D = \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_\lambda} \right|$ gesetzt wird. Nach dem Hilfssatz I von Sg. I können die Polynome $f_1, \ldots, f_m$ so gewählt gedacht werden, daß D in keinem der endlich vielen singulären Punkte verschwindet; dann ist $(\mathfrak{M}_r, (\mu - 1), D) = 1$ und demnach

$$\begin{aligned} &N_r(f_1, \ldots, f_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}_r, (\mu - 1)), \text{ und analog} \\ &M_r(g_1, \ldots, g_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{N}_r, (\mu - 1)). \end{aligned} \tag{3.}$$

Dies bedeutet, daß $(\mathfrak{M}_r, (\mu - 1))$ und $(\mathfrak{N}_r, (\mu - 1))$ äquivalent sind. Ist nun μ so groß, daß $(\mu - 1) \equiv 0$ $(\mathfrak{M}_r)$ bzw. $(\mathfrak{N}_r)$ ist, so sind $\mathfrak{M}_r$ und $\mathfrak{N}_r$ selbst äquivalent. Wir wollen μ so groß gewählt denken, daß dies für jeden in Betracht kommenden Wert von r erfüllt ist. *Dann ist in unseren Voraussetzungen also insbesondere die Isomorphie der Singularitätengruppen enthalten.*

Wir denken uns jetzt einen der singulären Punkte von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ in den Koordinatenanfangspunkt gelegt; wir wollen dann zeigen, daß es keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wenn wir die Übergangssubstitutionen f und g in der Gestalt:

$$f_i = x_i + (2), \quad g_i = y_i + (2) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{4.}$$

ansetzen. Zunächst sind die linearen Bestandteile der f_i nach Voraussetzung linear unabhängig; analoges kann von den g_i angenommen werden und für die beiden Matrizen A und B dieser Bestandteile gilt $E - BA = U$, wo E die Einheitsmatrix und U die Matrix der linearen Bestandteile gewisser zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Polynome ist. Handelt es sich um einen „total singulären" Punkt, d. h. um eine Nullstelle von $\mathfrak{M}_1$, so ist $U = 0$, also A zu B invers. Alsdann braucht man nur die linearen Bestandteile der f_i als neue Variable x_i und diejenigen der g_i als neue Variable y_i einzuführen, um unter Beibehaltung der Reziprozitätsrelationen (2.) und der Bedingung $D \neq 0$ in allen singulären Punkten die Gestalt (4.) zu erzielen. Sind aber in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ Polynome mit linearen Unterformen in x und y vorhanden, so führen wir zunächst diese, soweit sie linear unabhängig sind, als neue Variable ein, sagen wir $x_1, \ldots, x_s$ und $y_1, \ldots, y_s$ (die Übereinstimmung der beiden Anzahlen ergibt sich aus dem Nichtverschwinden der Determinanten $|A|$ und $|B|$). Ist nun $f_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + (2)$, so muß nunmehr wegen (1.) $a_{is+1} = \cdots = a_{im} = 0$ sein für

---

[1]) Natürlich ist (μ) stets sinngemäß als Ideal in $x_1, \ldots, x_m$ oder in $y_1, \ldots, y_m$ aufzufassen.

[2]) Umgekehrt würde aus der Äquivalenz von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ wegen Satz II diejenige von $(\mathfrak{M}, (\mu))$ und $(\mathfrak{N}, (\mu))$ für jedes μ folgen.

$i = 1, \ldots, s$. Daher findet man innerhalb der Restklassen von $f_1, \ldots, f_s$ Polynome der Gestalt $x_1 + (2), \ldots, x_s + (2)$, die wir jetzt selbst mit $f_1, \ldots, f_s$ bezeichnen können. Analog ist zu erreichen, daß $g_1 = y_1 + (2), \ldots, g_s = y_s + (2)$ wird. Ferner gibt es innerhalb der Restklassen der Polynome $f_{s+1}, \ldots, f_m$ solche, deren lineare Bestandteile von $x_1, \ldots, x_s$ frei sind, innerhalb der Restklassen von $g_{s+1}, \ldots, g_m$ solche, deren lineare Bestandteile von $y_1, \ldots, y_s$ frei sind. Die Matrizen A_1 und B_1 dieser Bestandteile in $x_{s+1}, \ldots, x_m$ bzw. $y_{s+1}, \ldots, y_m$ haben dann ebenfalls von Null verschiedene Determinanten, denn aus den Reziprozitätsrelationen (2.) findet man $E_1 = B_1 A_1$. Demnach kann man durch Einführung geeigneter linearer Verbindungen als neuer Variablen $x_{s+1}, \ldots, x_m, y_{s+1}, \ldots, y_m$ auch für $f_{s+1}, \ldots, f_m$ und $g_{s+1}, \ldots, g_m$ die Gestalt (4.) erreichen[1]).

Wir führen nun zum Zwecke der Auflösung des singulären Koordinatenanfangspunktes die *Cremona*transformationen

$$\text{(5.)} \qquad \begin{array}{ll} x_1 = x_1' & y_1 = y_1' \\ x_2 = x_1' x_2' & y_2 = y_1' y_2' \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_m = x_1' x_m' & y_m = y_1' y_m' \end{array}$$

in $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ ein. Das Koordinatensystem kann unbeschadet der vorangehenden Überlegungen so gewählt werden, daß weder auf $x_1 = 0$ noch auf $y_1 = 0$ ein vom Nullpunkt verschiedener singulärer Punkt liegt. Ist $k \geqq 1$ die Vielfachheit (d. h. der kleinste vorkommende Untergrad) von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ im Nullpunkte, so setzen wir für irgendein M aus $\mathfrak{M}$

$$\text{(6.)} \qquad M(x_1', x_1' x_2', \ldots, x_1' x_m') = x_1'^{k} \cdot M'(x_1', \ldots, x_m')$$

und fassen das von allen M' erzeugte Ideal $\mathfrak{M}'$ ins Auge.

Analog definieren wir $\mathfrak{N}'$. Ferner sei noch $\mu > k + 1$ vorausgesetzt.

Wir behaupten dann die Äquivalenz von $(\mathfrak{M}', (\mu - k - 1)')$ *und* $(\mathfrak{N}', (\mu - k - 1)')$, wobei $(\mu - k - 1)'$ das Ideal aller Polynome in den gestrichenen Variablen bedeutet, die in jedem singulären Punkte von $\mathfrak{M}'$ bzw. $\mathfrak{N}'$ mindestens $(\mu - k - 1)$fach verschwinden; m. a. W. *wir behaupten die Existenz gewisser Polynome* $f_1', \ldots, f_m'$ *von den* x' *und* $g_1', \ldots, g_m'$ *von den* y', *so daß die Kongruenzen*

$$\text{(7.)} \begin{cases} M'(g_1', \ldots, g_m') \equiv 0 \\ M'(g_1', \ldots, g_m') \equiv 0 \quad (\mathfrak{N}', (\mu - k - 1)') \end{cases} \qquad \begin{array}{l} N'(f_1', \ldots, f_m') \equiv 0 \\ N'(f_1', \ldots, f_m') \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}', (\mu - k - 1)') \end{array}$$

$$\text{(8.)} \quad f_i'(g_1', \ldots, g_m') \equiv y_i' \qquad g_i'(f_1', \ldots, f_m') \equiv x_i'$$

$$(i = 1, \ldots, m)$$

bestehen. Dabei ist M' bzw. N' ein beliebiges Polynom von $(\mu - k - 1)'$.

Zum Beweise setzen wir zunächst

$$\text{(9.)} \qquad f_1(x_1', x_1' x_2', \ldots, x_1' x_m') = x_1' \cdot \bar{f}_1(x_1', \ldots, x_m') = f_1'(x_1', \ldots, x_m')$$

$$\text{(10.)} \qquad f_i(x_1', x_1' x_2', \ldots, x_1' x_m') = x_1' \bar{f}_i(x_1', \ldots, x_m') \qquad (i = 2, \ldots, m)$$

und definieren analog $\bar{g}_1, g_1'$ und $\bar{g}_i$. Ferner betrachten wir die Kongruenzen

---

[1]) $D \neq 0$ in allen Singularitäten muß dabei jetzt als weitere Voraussetzung für das Folgende ausdrücklich verlangt werden. Ist sie nicht erfüllt, so hat man andere *Cremona*transformationen zu verwenden.

$$(11.) \qquad \overline{f}_i \equiv \overline{f}_1 f'_i \quad (x_1'^k \mathfrak{M}', x_1'^k (\mu)') \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Diese haben Lösungen f'_i, weil $(x_1'^k \mathfrak{M}', x_1'^k (\mu)', \overline{f}_1) = 1$ ist. In der Tat ist wegen (4.) und (9.) $\overline{f}_1 \equiv 1 (x'_1)$, also für jede Nullstelle von $\overline{f}_1$ der Wert von $x'_1 \neq 0$. Ferner folgt aus (6.)

$$(12.) \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial x_1}(x'_1, x'_1 x'_2, \ldots, x'_1 x'_m) = k x_1'^{k-1} \cdot M' + x_1'^k \cdot \dfrac{\partial M'}{\partial x'_1} - x_1'^{k-1} \cdot x'_2 \cdot \dfrac{\partial M'}{\partial x'_2} - \cdots - x'_1 x'_m \dfrac{\partial M'}{\partial x'_m}, \\ \dfrac{\partial M}{\partial x_i}(x'_1, x'_1 x'_2, \ldots, x'_1 x'_m) = x_1'^{k-1} \cdot \dfrac{\partial M'}{\partial x'_i} \qquad (i = 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$(13.) \qquad M_r(x'_1, x'_1 x'_2, \ldots, x'_1 x'_m) \equiv 0 \, (\mathfrak{M}'_r),$$

und analog

$$(13.) \qquad N_r(y'_1, y'_1 y'_2, \ldots, y'_1 y'_m) \equiv 0 \, (\mathfrak{N}'_r)$$

für jedes $M_r \equiv 0 \, (\mathfrak{M}_r)$ und $N_r \equiv 0 \, (\mathfrak{N}_r)$. Setzt man also in die erste Gleichung (3.) die Substitution (5.) ein, so kommt wegen (9.), (10.), (13.) und wegen $(\mu - 1) \equiv 0 \, (\mathfrak{M}_r)$:

$$N_r(x'_1 \overline{f}_1, x'_1 \overline{f}_2, \ldots, x'_1 \overline{f}_m) \equiv 0 \, (\mathfrak{M}'_r).$$

Gäbe es nun eine Singularität von $\mathfrak{M}'$, für die $\overline{f}_1 = 0$ wäre, so wäre für das betreffende Wertsystem $N_r(0, x'_1 \overline{f}_2, \ldots, x'_1 \overline{f}_m) = 0$, also wegen unserer Voraussetzung, daß auf $y_1 = 0$ nur die eine Singularität des Koordinatenanfangspunktes liegen soll, $x'_1 \overline{f}_2 = 0, \ldots, x'_1 \overline{f}_m = 0$, d. h. $\overline{f}_2 = 0, \ldots, \overline{f}_m = 0$. Nun betrachten wir die zweite Gleichung (2.) für $i = 1$, die wir wegen $(\mu) \equiv 0 \, (\mathfrak{M}_r)$ auch in der Form

$$g_1(f_1, \ldots, f_m) \equiv x_1 \, (\mathfrak{M}_r)$$

schreiben können. Die Einsetzung von (5.) und die Einführung des speziellen Wertsystems $x'_1, \ldots, x'_m$ gibt dann wegen (13.)

$$g_1(0, \ldots, 0) = 0 = x'_1,$$

also einen Widerspruch. — Analog verfahren wir zur Bestimmung der g'_i.

Wir kommen nun zum Beweise der ersten Zeile der Behauptung (7.). Vermöge (5.), (6.) und (11.) wird für irgendein $N \equiv 0 \, (\mathfrak{N})$:

$$(14.) \qquad \begin{aligned} N(f_1, \ldots, f_m) &\equiv N(f'_1, f'_1 f'_2, \ldots, f'_1 f'_m) \\ &\equiv f_1'^k \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) \end{aligned} \qquad (x_1'^{k+1} \mathfrak{M}', x_1'^{k+1} (\mu)').$$

Andererseits liefert die linke Seite dieser Kongruenz wegen (1.) und (6.) den Ausdruck $x_1'^k \cdot M' + M'$, wobei M' ein Polynom von $(\mu)'$ bedeutet; in der Tat folgt aus (6.) und (12), daß die vom Nullpunkte verschiedenen Singularitäten von $\mathfrak{M}$ in solche von $\mathfrak{M}'$ übergehen, während für alle andern Singularitäten von $\mathfrak{M}'$ offenbar $x'_1 = 0$ ist. Da nun M' aus einem $M \equiv 0 (\mu)$ vermöge (5.) hervorgegangen ist, so ist es durch $x_1'^\mu$ teilbar und verschwindet auch in allen nicht auf $x'_1 = 0$ gelegenen Singularitäten von $\mathfrak{M}'$ mindestens μfach.

Wegen $\mu > k$ kann nun die Gleichung (14.) durch $x_1'^k$ dividiert werden und ergibt

$$\overline{f}_1^k \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}', (\mu - k)').$$

Es hat nun, wie wir oben sahen, $\bar{f}_1$ keine Nullstelle mit $\mathfrak{M}'_r$ gemeinsam; demgemäß folgt die erste Zeile der Behauptung (7.), deren andere Hälfte ja genau so zu beweisen ist.

Wir wollen jetzt die zweite Zeile (7.) beweisen. Dies wird geleistet sein, wenn es uns gelingt zu zeigen, daß

$$(15.) \qquad N'_r(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv 0 \ (\mathfrak{M}'_r), \ M'_r(g'_1, \ldots, g'_m) \equiv 0 \ (\mathfrak{N}'_r)$$

für irgendein $N'_r \equiv 0 \, (\mathfrak{N}'_r)$ und $M'_r \equiv 0 \ (\mathfrak{M}'_r)$; alsdann wird nämlich $N'(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv 0$ $(\mathfrak{M}', (\mu - k - 1)')$, weil für jeden singulären Punkt $x' = \alpha'$ von $\mathfrak{M}'$ der Wert $N'_r(f'_1, \ldots, f'_m) = 0$ ist, also $f'_1(\alpha'), \ldots, f'_m(\alpha')$ ein singulärer Punkt von $\mathfrak{N}'$ ist, für den $N'(y'_1, \ldots, y'_m)$ mindestens $(\mu - k - 1)$fach verschwindet, woraus folgt, daß auch $N'(f'_1, \ldots, f'_m)$ in $x' = \alpha'$ mindestens $(\mu - k - 1)$fach verschwindet. Analog ergibt sich aus $M'_r(g'_1, \ldots, g'_m) \equiv 0 \ (\mathfrak{N}'_r)$ auch $M'(g'_1, \ldots, g'_m) \equiv 0 \, (\mathfrak{N}', (\mu - k - 1)')$.

Die Behauptung (15.) wird nun gezeigt sein, wenn dies für $r = 1$ geschehen ist. Wir differentiieren hierzu die Kongruenz (1.) und finden

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial N}{\partial y_j}(f_1, \ldots, f_m) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_\lambda} \equiv \frac{\partial M}{\partial x_\lambda} \quad (\mu - 1),$$

wenn $N(f_1, \ldots, f_m) \equiv M \ (\mu)$ ist. Bezeichnen wir die Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung der Matrix $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\lambda}\right)$ mit $D_{\lambda i}$, so ist

$$(16.) \qquad D \cdot \frac{\partial N}{\partial y_1}(f_1, \ldots, f_m) \equiv \sum_{\lambda=1}^{m} D_{\lambda 1} \frac{\partial M}{\partial x_\lambda} \quad (\mu - 1),$$

also, weil $D \bmod \mathfrak{M}_1$ eine Reziproke besitzt,

$$\frac{\partial N}{\partial y_1}(f_1, \ldots, f_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}_1, (\mu - 1))$$
$$\equiv 0 \quad (\mathfrak{M}_1)$$

und daher nach Einsetzung von (5.) wegen (12.)

$$\frac{\partial N}{\partial y_1}(f_1, \ldots, f_m) \equiv 0 \quad (x_1'^{k-1} \mathfrak{M}'_1).$$

Analog gilt vermöge (5.)

$$(17.) \qquad \frac{\partial N}{\partial y_i}(f_1, \ldots, f_m) \equiv 0 \quad (x_1'^{k-1} \mathfrak{M}'_1) \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Nun ist andererseits nach (9.), (10.), (11.) und (12.):

$$(18.) \qquad \frac{\partial N}{\partial y_i}(f_1, \ldots, f_m) \equiv \frac{\partial N}{\partial y_i}(f'_1, f'_1 f'_2, \ldots, f'_1 f_m) = f_1'^{k-1} \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_i}(f'_1, \ldots, f'_m)$$
$$\bmod \ (x_1'^{k+1} \mathfrak{M}', x_1'^{k+1} \cdot (\mu)') \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Vergleichung mit (17.) ergibt nach Division mit $x_1'^{k-1}$:

$$\bar{f}_1^{k-1} \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_i}(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}'_1, x_1'^2 (\mu)') \qquad (i = 2, \ldots, m),$$

also

$$(19.) \qquad \frac{\partial N'}{\partial y'_i}(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}'_1, x_1'^2 (\mu)') \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Zur Aufstellung der analogen Gleichung für $i = 1$ müssen wir etwas genauer rechnen. Wir gehen von der Relation (16.) aus und stellen ihr die Kongruenz

$$\frac{\partial N}{\partial y_1}(f_1, \ldots, f_m) \equiv \frac{\partial N}{\partial y_1}(f'_1, f'_1 f'_2, \ldots, f'_1 f'_m) \quad (x'^{k+1}\mathfrak{M}', x'^{k+1}_1(\mu)')$$

an die Seite. Dies wird wegen (12):

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial y_1}(f_1, \ldots, f_m) \equiv k f'^{k-1}_1 \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) + f'^{k}_1 \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_1}(f'_1, \ldots, f'_m) \\ - f'^{k-1}_1 \cdot f'_2 \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_2}(f'_1, \ldots, f'_m) - \cdots \\ - f'^{k-1}_1 \cdot f'_m \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_m}(f'_1, \ldots, f'_m) \qquad (x'^{k+1}_1\mathfrak{M}', x'^{k+1}_1(\mu)').\end{aligned}$$

Hiernach finden wir wegen (16.) durch Multiplikation mit $D(x'_1, x'_1 x'_2, \ldots, x'_1 x'_m)$, weil vermöge (5.) die Polynome $D_{\lambda i} \equiv \delta_{\lambda i}(x'_1)$ werden:

$$(20.)\quad \left\{\begin{aligned} D \cdot f'^{k}_1 \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_1}(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv k x'^{k-1}_1 \cdot M' - k \cdot f'^{k-1}_1 \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) \\ - x'^{k-1}_1 \cdot x'_2 \cdot \frac{\partial M'}{\partial x'_2} + f'^{k-1}_1 \cdot f'_2 \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_2}(f'_1, \ldots, f'_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - x'^{k-1}_1 \cdot x'_m \cdot \frac{\partial M'}{\partial x'_m} + f'^{k-1}_1 \cdot f'_m \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_m}(f'_1, \ldots, f'_m) \end{aligned}\right.$$
$$(x'^{k}_1\mathfrak{M}'_1, x'^{k}_1(\mu - k - 1)').$$

Nun ist aber wegen (1.) und (14.) für das obige $M \equiv 0(\mathfrak{M})$:

$$M(x'_1, x'_1 x'_2, \ldots, x'_1 x'_m) \equiv f'^{k}_1 \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) \quad (x'^{k+1}_1\mathfrak{M}', x'^{k+1}_1(\mu - k - 1)'),$$

also nach (6.)

$$M'(x'_1, \ldots, x'_m) \equiv \bar{f}'^{k}_1 \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) \quad (x'_1\mathfrak{M}', x'_1(\mu - k - 1)'),$$

und

$$M' - \bar{f}'^{k-1}_1 \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv (\bar{f}'^{k}_1 - \bar{f}'^{k-1}_1) \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) \quad (x'_1\mathfrak{M}', x'_1(\mu - k - 1)').$$

Die Differenz rechter Hand ist aber $\equiv 0(x'_1)$; es wird daher wegen der ersten Zeile von (7.)

$$M' - \bar{f}'^{k-1}_1 \cdot N'(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv 0 \quad (x'_1\mathfrak{M}', x'_1(\mu - k - 1)'),$$

also ist die erste Zeile rechter Hand in (20.) zu $(x'^{k}_1\mathfrak{M}', x'^{k}_1(\mu - k - 1)')$ gehörig. Genau ebenso zeigt man aber wegen (18.) und der zu (16.) analogen Gleichung für $\frac{\partial N}{\partial y_i}(f_1, \ldots, f_m)$ nach Einführung von (5.):

$$D \cdot f'^{k-1}_1 \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_i}(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv \sum_{\lambda=1}^{m} D_{\lambda i} \frac{\partial M}{\partial x_\lambda} \quad (x'^{k+1}_1\mathfrak{M}', x'^{k}_1(\mu - k - 1)'),$$
$$(i = 2, \ldots, m)$$

also wegen (12.), $D_{\lambda i} \equiv \delta_{\lambda i}(x'_1)$ und (19.):

$$f'^{k-1}_1 \cdot \frac{\partial N'}{\partial y'_i}(f'_1, \ldots, f'_m) \equiv \frac{\partial M'}{\partial x'_i} \cdot x'^{k-1}_1 \quad (x'^{k}_1\mathfrak{M}'_1, x'^{k}_1(\mu - k - 1)'),$$

daher

$$\frac{\partial N'}{\partial y_i'}(f_1', \ldots, f_m') \equiv \frac{\partial M'}{\partial x_i'} \quad (x_1' \mathfrak{M}_1', x_1'(\mu - k - 1)').$$

Weil nun nach (11.) $f_i' \equiv x_i'(x_1')$, so ist auch jede der folgenden Zeilen rechts in (20.) zu $(x_1'^k \mathfrak{M}_1', x_1'^k(\mu - k - 1)')$ gehörig und demnach durch Division mit $x_1'^k$ und nach Fortlassung des Faktors D, der ja mod $\mathfrak{M}_1$ eine Reziproke besitzt, also auch nach Einführung von (5.) wegen (13.) eine solche mod $\mathfrak{M}_1'$ besitzt,

$$\frac{\partial N'}{\partial y_1'}(f_1', \ldots, f_m') \equiv 0 \quad (\mathfrak{M}_1', (\mu - k - 1)').$$

Damit sind, falls μ genügend groß ist, die Relationen (15.), also (7.) vollständig bewiesen.

Um nun die Gleichungen (8.) zunächst für $i = 1$ zu beweisen, setzen wir (5.) in (2.) ein und finden wegen (9.), (10.) und (11.):

$$g_1(f_1', f_1' f_2', \ldots, f_1' f_m') \equiv x_1' \quad (x_1'^k \mathfrak{M}', x_1'^k(\mu - k)'),$$

also

$$g_1'(f_1, \ldots, f_m') \equiv x_1' \quad (x_1'^k \mathfrak{M}', x_1'^k(\mu - k)'), \tag{21.}$$

d. h. die Behauptung. Ferner ist analog

$$f_1' \cdot \bar{g}_i(f_1, \ldots, f_m') \equiv x_1' x_i' \quad (x_1'^k \mathfrak{M}', x_1'^k(\mu - k)'), \quad (i = 2, \ldots, m)$$

und somit

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{g}_i(f_1', \ldots, f_m') \equiv x_i' \quad (x_1'^{k-1} \mathfrak{M}_1', x_1'^{k-1}(\mu - k - 1)') \quad (i = 2, \ldots, m).$$

Nun ist nach (7.) und (11.)

$$\bar{g}_i(f_1', \ldots, f_m') \equiv \bar{g}_1(f_1', \ldots, f_m') \cdot g_i'(f_1', \ldots, f_m') \quad (x_1'^k \mathfrak{M}', x_1'^k(\mu - k - 1)');$$

setzt man diesen Wert für $\bar{g}_i(f_1', \ldots, f_m')$ oben ein, so ergibt sich

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{g}_1(f_1', \ldots, f_m') \cdot g_i'(f_1', \ldots, f_m') \equiv x_i' \quad (x_1'^{k-1} \mathfrak{M}_1', x_1'^{k-1}(\mu - k - 1)') \quad (i = 2, \ldots, m).$$

Es ist aber andererseits nach (9.) und (21.):

$$f_1' \cdot \bar{g}_1(f_1', \ldots, f_m') \equiv x_1' \quad (x_1'^k \mathfrak{M}', x_1'^k(\mu - k)'),$$

also nach Division mit x_1':

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{g}_1(f_1', \ldots, f_m') \equiv 1 \quad (x_1'^{k-1} \mathfrak{M}', x_1'^{k-1}(\mu - k)').$$

Demnach gilt jetzt:

$$g_i'(f_1', \ldots, f_m') \equiv x_i' \quad (x_1'^{k-1} \mathfrak{M}', x_1'^{k-1}(\mu - k - 1)'),$$

also mit (21.) zusammen die Behauptung (8.), deren erste Hälfte analog bewiesen wird.

Die Gleichungen (7.) und (8.) zusammengenommen besagen, daß zwischen $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{N}'$ analoge Beziehungen bestehen wie zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$; setzt man weiterhin voraus, daß auch $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{N}'$ nur punktförmige Singularitäten haben [1]), so

[1]) Diese Voraussetzung hätte auch in Sg. II Abschnitt II für die erste und alle folgenden Bildmannigfaltigkeiten ausdrücklich hinzugefügt werden müssen, was hiermit nachgeholt sei.

können wir, falls μ von vornherein genügend groß ist, dieselben Betrachtungen über $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{N}'$ anstellen wie über $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Analog gelangt man zu Gebilden $\mathfrak{M}''$ und $\mathfrak{N}''$, und so fort. Das Verfahren findet seine Grenze, wenn bei einem der abgeleiteten Gebilde kein total singulärer Punkt mehr existiert, oder wenn die Singularitäten höhere Mannigfaltigkeiten als Punkte umfassen. In jedem Falle bricht das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten ab.

Um dies zu zeigen, beachten wir, daß die sämtlichen auf $x_1 = 0$ gelegenen endlich vielen Singularitäten von $\mathfrak{M}'$ eine Vielfachheit $\leqq k$ haben; sie alle sind als Bildpunkte des Nullpunktes von $\mathfrak{M}$ aufzufassen, und es fragt sich nunmehr nur noch, ob in einer Folge von aufeinanderfolgenden Bildpunkten auf $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$, die Vielfachheit dauernd den gleichen Wert $k \geqq 2$ haben kann. Ist dies nicht möglich, so ist die Endlichkeit der Kette gezeigt.

Wir betrachten zu diesem Zwecke ein Polynom $S(x_1)$, das zu $\mathfrak{M}_r$ gehört, und setzen $S(x_1) = x_1^{\varrho} \cdot S_1(x_1)$, wobei $S_1(0) \neq 0$ ist. Wir behaupten, daß, falls die aufeinanderfolgenden Vielfachheiten alle gleich k sind, die Anzahl λ der aufeinanderfolgenden Gebilde $\leqq \varrho + 1$ sein muß. Ist nämlich $\lambda = \varrho + 2$, so kann für die Gebilde $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \ldots, \mathfrak{M}^{(\varrho+1)}$ das Koordinatensystem so gewählt werden, daß in allen Substitutionen die erste Gleichung von der Gestalt

$$x_1 = (h_1 + l_1 x_2' + \cdots) x_1' \text{ mit } h_1 \neq 0$$
$$x_1' = (h_1' + l_1' x_2'' + \cdots) x_1'' \text{ mit } h_1' \neq 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^{(\varrho)} = (h_1^{(\varrho)} + l_1^{(\varrho)} x_2^{(\varrho+1)} + \cdots) x_1^{(\varrho+1)} \text{ mit } h_1^{(\varrho)} \neq 0$$

wird. Für die Gesamtsubstitution von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}^{(\varrho+1)}$ erhält man dann die erste Gleichung

$$x_1 = (h_1 \cdot h_1' \cdots h_1^{(\varrho)} + \cdots) \quad x_1^{(\varrho+1)},$$

also wird $S(x_1) = x_1^{(\varrho+1)\varrho} \cdot S_1 \cdot (h_1 \cdots h_1^{(\varrho)} + \cdots)^{\varrho}$, wobei S_1 nicht mehr durch $x_1^{(\varrho+1)}$ teilbar ist. Da $S(x_1)$ zu $\mathfrak{M}_r$ gehört, so ist es durch $x_1'^{k-1}$ nach der ersten Substitution, durch $x_1'^{2k-2}$ nach der zweiten Substitution, ..., durch $x_1^{(\varrho+1)(\varrho+1)(k-1)}$ nach der $(\varrho + 1)$-ten Substitution teilbar. Demnach wäre $(\varrho + 1)(k - 1) \leqq \varrho$; und dies ist ein Widerspruch.

Wegen der hiermit bewiesenen Beschränktheit der Kette kann daher μ von vornherein so groß gewählt werden, daß die Isomorphie aller abgeleiteten Singularitätengruppen herauskommt; insbesondere ist diese also gesichert, wenn wir die Äquivalenz von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ selbst voraussetzen.

Es sei noch bemerkt, daß sich analog wie in Sg. II § 3 zeigen läßt, daß bei der Auflösung eines singulären Punktes die auf die übrigen Singularitäten bezüglichen Bestandteile der Singularitätengruppen isomorph erhalten bleiben.

Wir fassen das Hauptergebnis folgendermaßen zusammen:

Satz III. *Die Auflösung eines total singulären Punktes P eines algebraischen Gebildes $\mathfrak{M}$ mit nur punktförmigen Singularitäten im m-dimensionalen Raum mit Hilfe gewisser quadratischer Cremonatransformationen liefert, falls alle abgeleiteten Gebilde ebenfalls nur punktförmige Singularitäten haben, für jedes dieser Gebilde Singularitätengruppen, die zu denjenigen isomorph sind, die man erhält, wenn man von*

einem affinrational verwandten Gebilde $\mathfrak{N}$ desselben Raumes ausgeht. Die Singularität des Punktes P kann daher innerhalb dieses Raumes affinrational invariant charakterisiert werden durch diejenigen Bestandteile der Singularitätengruppen von $\mathfrak{M}$ sowie von den abgeleiteten Gebilden, die zu ihm und seinen Bildpunkten gehören. Die Bestandteile, die zu andern Singularitäten von $\mathfrak{M}$ gehören, bleiben bei allen diesen Abbildungen isomorph erhalten. Jedes der i. a. unendlich vielen möglichen Auflösungsverfahren bricht nach einer beschränkten Anzahl von Schritten ab.

Ergibt sich an irgend einer Stelle des Auflösungsprozesses von $\mathfrak{M}$ ein Gebilde ohne total singuläre Punkte oder ein solches mit höheren als punktförmigen Singularitäten, so gilt dasselbe von $\mathfrak{N}$ und die zugehörigen abgeleiteten Singularitätengruppen werden ebenfalls noch isomorph; der Auflösungsprozeß selbst bricht dabei ab.

Breslau, den 18. April 1923.

Untersuchungen über die asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen.

Von Herrn *G. Hoheisel* in Breslau.

Einleitung.

1. Die Untersuchungen über asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen oder konkreter über die Unbestimmtheitsstellen von endlichem Rang zeigen zweierlei Tendenz. Ein Teil der Autoren sucht die funktionentheoretische Eigenart jener Singularität für die Integrale zu ergründen. Die anderen dagegen beschränken sich im Hinblick auf die Bedürfnisse der theoretischen Pysik auf reelle Werte der Veränderlichen und suchen unter möglichst geringen Voraussetzungen über die Koeffizienten der Differentialgleichung in möglichst genauer Weise das Verhalten der Integrale für reelle Werte der Veränderlichen in der Nähe der singulären Stelle zu bestimmen. An einem Beispiel sei dieser Unterschied herausgestellt.

2. Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der Unbestimmtheitsstelle $z = \infty$ vom Range 1 hat folgende Gestalt:

$$v''(z) + p_1(z)v'(z) + p_2(z)v(z) = 0.$$

Dabei sind $p_1(z)$ und $p_2(z)$ regulär in $z = \infty$.

Man weiß dann, daß es im allgemeinen zwei Integrale v_1, v_2 gibt, die durch zwei divergente Reihen

$$S_\nu = e^{\sigma_\nu z} z^{\varrho_\nu} P_\nu\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (\nu = 1, 2)$$

in gewissen Winkelräumen asymptotisch dargestellt werden.

Funktionentheoretisch ging das Interesse dahin, diese Winkelräume möglichst groß zu machen und sie etwa — wenn möglich — über den Vollwinkel auszudehnen.

Die zweite Gruppe von Autoren suchte dagegen die Gültigkeit jener asymptotischen Darstellung oder einer ihr gleichwertigen nur für reelle z unter geringeren Bedingungen über die Koeffizienten herzuleiten. Es zeigt sich z. B., daß die Koeffizienten p_ν lediglich asymptotisch durch Potenzreihen von $\frac{1}{z}$ dargestellt zu sein brauchen, um die Beziehung $v_\nu \sim S_\nu$ gültig zu machen.

Doch ändert sich qualitativ das Verhalten der Integrale nicht, wenn man die Voraussetzungen über die Koeffizienten recht erheblich einschränkt.

3. Die vorliegende Arbeit ist in der Methode und in den Absichten funk-

tionentheoretisch orientiert. Trotzdem sind aber die Bedingungen, die den Koeffizienten auferlegt werden, so weit gefaßt, daß die Resultate auch für reelle Werte der Veränderlichen neu und von Interesse sind.

Unter vorläufiger Beschränkung auf die zweite Ordnung läßt sich das Ergebnis so fassen:

In der Differentialgleichung

$$v''(z) + p_1(z)\,v'(z) + p_2(z)\,v(z) = 0$$

sollen die Funktionen $p(z)$ lediglich der folgenden Bedingung genügen:

In einem Sektor S, definiert durch

$$|z| \geqq r_0 > 0, \quad \varphi_0 \leqq \arg z \leqq \varphi_1,$$

sind die $p(z)$ regulär und lassen die Darstellung zu:

$$p_\nu(z) = a_{\nu,0} + \frac{a_{\nu,1}}{z} + \frac{\psi_\nu(z)}{z^2} \qquad (\nu = 1, 2)$$

wobei in S $\psi_\nu(z)$ beschränkt bleibt

$$|\psi_\nu(z)| < C.$$

Es sollen ferner die Wurzeln der Gleichung

$$\sigma^2 = a_{1,0}\sigma + a_{2,0} = 0,$$

die wir mit σ_1 und σ_2 bezeichnen, verschieden sein.

Durch die Transformation

$$v(z) = e^{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\cdot z}\,\bar{v}(z)$$

geht die Differentialgleichung bei neuer Bezeichnung in die folgende über

$$(1.)\quad v''(z) + \left(\frac{a_{1,1}}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2}\right)v'(z) + \left(a_{2,0} + \frac{a_{2,1}}{z} + \frac{\psi_2(z)}{z^2}\right)v(z) = 0.$$

Die Wurzeln der neuen Gleichung

$$\sigma^2 + a_{2,0} = 0$$

sind $\pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, also auch nicht gleich, d. h. $a_{2,0} \neq 0$. σ bezeichne irgendeine der beiden Wurzeln. Die Gleichung

$$\Re(\sigma z) = 0$$

definiert dann eine bestimmte durch den Nullpunkt gehende Gerade, die wir kurz kritische Gerade nennen wollen. Diese Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen. In der einen ist $\Re(\sigma z) < 0$: $e^{\sigma z}$ bleibt also klein, in der anderen ist $\Re(\sigma z) > 0$: $e^{\sigma z}$ wird also groß.

In den Winkelraum S können beide Strahlen dieser Geraden oder auch nur ein Strahl oder keiner hineinfallen. Unser Satz lautet dann so:

Liegen nicht beide kritische Strahlen in S, so gibt es im Gebiete S ein Fundamentalsystem $v_{\mathrm{I}}(z)$ und $v_{\mathrm{II}}(z)$ der Differentialgleichung 1, *das die Darstellung zuläßt*

$$v_{\mathrm{I}}(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,1}(z)$$

$$v_{\mathrm{II}}(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}(z).$$

Dabei ist $\chi_{0,1} = \chi_{0,2} = 1$, *und in S gilt die Ungleichung*

$$\chi_n(z) < \frac{1}{n!}\left|\frac{C}{z}\right|^n.$$

Die Funktionen $\chi_n(z)$ *sind in S regulär.*

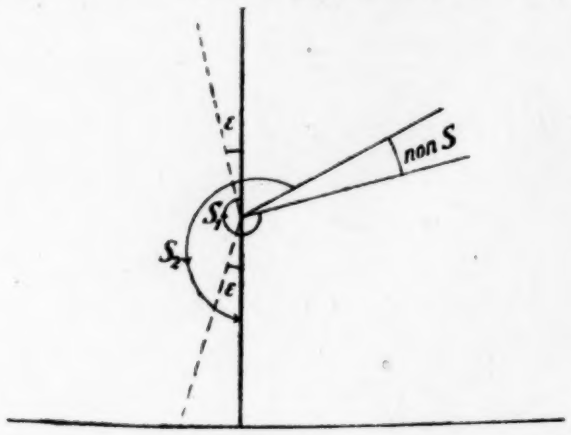


Fig. 1.

Liegen dagegen *beide kritische Strahlen in S*, so läßt sich folgendes sagen:

Es gibt eine ganz bestimmte durch die kritische Gerade begrenzte Halbebene, die (von einem endlichen Stück abgesehen) ganz in S liegt. σ sei diejenige der beiden Wurzeln $\pm\sqrt{-a_{2,0}}$, für welche die Funktion $e^{\sigma z}$ in dieser Halbebene klein bleibt.

Dann gibt es ein Integral $v_I(z)$, *das in S die Darstellung zuläßt*

$$v_I(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,1}(z).$$

Ferner gibt es ein Integral $v_{II,1}(z)$, *das in dem unten näher gekennzeichneten Teilsektor* S_1^* *von S die Darstellung zuläßt*

$$v_{II,1}(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}^1(z)$$

und ein Integral $v_{II,2}(z)$, *das in dem unten näher gekennzeichneten Teilsektor* S_2^* *die Darstellung zuläßt*

$$v_{II,2}(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}^2(z).$$

Dabei sind wieder die $\chi_0 \equiv 1$. *Die Funktionen* χ_n *sind in S bzw.* S_ν^* *regulär und genügen dort denselben Ungleichungen wie oben.*

Die Reihen sind also in den fraglichen Gebieten gleichmäßig und absolut konvergent. S_1^* bezeichnet folgendes Gebiet: man geht von einem Randstrahl von S aus, überschreitet einen kritischen Strahl und macht vor dem zweiten bei einem Strahle halt, der um den beliebig kleinen, aber festen Winkel ε von der Richtung des zweiten kritischen Strahles abweicht. S_2^* ergibt sich entsprechend, wenn man von dem anderen Randstrahl von S ausgeht.

Für den Fall einer Doppelwurzel der Gleichung

$$\sigma^2 + a_{1,0} + a_{2,0} = 0$$

finden sich die Resultate in § 4.

Die Methode, die zu diesen Resultaten führt, ist die sukzessive Approximation. Sie ist bereits von *Horn* in Crelle 133 zur Untersuchung der Integrale an einer Unbestimmtheitsstelle vom endlichen Range verwandt worden. Wendet man die Resultate der vorliegenden Arbeit auf den speziellen Fall an, wo die Koeffizienten $p_\nu(z)$ regulär in $z = \infty$ sind, so erhält man eine Bestätigung der *Horn*schen Resultate. Diese Resultate sind deshalb so bemerkenswert, weil sie erlauben, das Verhalten der Integrale in einer den Vollwinkel überschreitenden Umgebung des singulären Punktes zu studieren. Wir machen von dieser Tatsache die folgende Anwendung.

Sind die Koeffizienten $p_1(z)$ *und* $p_2(z)$ *regulär im Punkte* $z = \infty$ *und ist das allgemeine Integral eine in* $z = \infty$ *eindeutige Funktion, so hat die Differentialgleichung*

zwei Integrale von der Form

$$e^{\sigma z} z^{m_1} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right) \quad e^{-\sigma z} z^{m_2} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dabei sind m_1 und m_2 ganze Zahlen, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ konvergente Potenzreihen.

In diesem Satze ist als Spezialfall der folgende *Halphen*sche Satz enthalten: Hat die Differentialgleichung

$$v''(z) + p_1(z)v'(z) + p_2(z)v(z) = 0,$$

in der die p_ν rational und in $z = \infty$ regulär sind, ein in der ganzen Ebene eindeutiges allgemeines Integral und sind im Endlichen nur Stellen der Bestimmtheit im *Fuchs*schen Sinne da, so hat die Differentialgleichung ein Lösungssystem

$$e^{\sigma_1 z} R_1(z) \quad e^{\sigma_2 z} R_2(z),$$

wobei R_1 und R_2 rationale Funktionen sind.

5. Wir wollen schließlich noch hinweisen auf die Beziehungen zu den Untersuchungen über das asymptotische Verhalten der Integrale bei reellen Werten der Veränderlichen. Dazu wollen wir noch die folgende recht naheliegende und leicht erkennbare Verallgemeinerung anzeigen:

Wenn die Koeffizienten $p_\nu(z)$ in S lediglich die Darstellung zulassen

$$p_\nu(z) = a_{\nu,0} + \frac{a_{\nu,1}}{z} + \frac{\psi_\nu(z)}{z^{1+\gamma}}, \tag{2.}$$

wobei γ reell und positiv und $\psi_\nu(z)$ in S beschränkt ist, dann bleiben alle Resultate erhalten. Nur genügen jetzt die $\chi_n(z)$ den Ungleichungen

$$|\chi_n(z)| < \frac{1}{n!}\left|\frac{C}{z^\gamma}\right|^n.$$

Das bleibt auch für den Fall richtig, daß S auf einen Strahl zusammenschrumpft, d. h. die Gleichung lediglich für große positive x gilt [1]).

Es ist damit die folgende Aufgabe fast restlos gelöst:

Was sind die geringsten Voraussetzungen, die man über die Koeffizienten p_ν noch machen kann, um gleichwohl die Integrale explizit so angeben zu können, daß ihr asymptotisches Verhalten deutlich erkennbar ist?

In der Tat: wählt man statt (2.) die nur etwas weitere Voraussetzung $p_\nu(z) = a_{\nu,0} + \frac{\psi_\nu(z)}{z}$ (ψ_ν beschränkt), so lassen sich die Integrale nicht mehr explizit angeben, wie man auch so schon leicht erkennt (ϱ_1 und ϱ_2 existieren nicht!) und wie ich an anderer Stelle eingehend klarlegen werde.

Ausführung.

§ 1.

Eine Drehung der z-Ebene ändert nichts an der Gestalt der Differentialgleichung. Wir können also annehmen, daß die negative reelle Achse in S liegt und kein kritischer Strahl ist.

---

[1]) Wir geben hierfür nicht den Beweis, der auch nur dann eine kleine Schwierigkeit verursacht, wenn die reelle Achse zugleich kritische Gerade ist. Es ist bequem, in diesem Falle noch die neue Bedingung hinzuzunehmen: $|z \cdot \psi_2'(z)|$ beschränkt.

Mit $\bar{S}$ bezeichnen wir denjenigen Teil von S, der in der Halbebene $\Re(z) \leqq 0$ liegt. Unter den beiden Wurzeln $\pm Ae^{i\psi}$ bezeichnen wir diejenige mit σ, deren Realteil positiv ist.

(3.) $$\Re(\sigma) = \sigma' > 0.$$

Die Transformation

(4.) $$v(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho} \bar{v}(z)$$

ausgeführt auf die Differentialgleichung (1.), führt zu der folgenden Differentialgleichung

(5.) $$\bar{v}''(z) + \bar{v}'(z)\left(2\sigma + \frac{b}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2}\right) + \bar{v}(z) \cdot \frac{\bar{\psi}_2(z)}{z^2} = 0.$$

Die Funktion

$$\bar{\psi}_2(z) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho a_{1,1} + \psi_1(z)(\varrho + \sigma) + \psi_2(z)$$

ist im Sektor S beschränkt.

Die Konstanten ϱ und b sind bestimmt durch

$$2\varrho = -a_{1,1} - \frac{a_{2,1}}{\sigma}, \quad b = -\frac{a_{2,1}}{\sigma}.$$

Die Querstriche lassen wir jetzt fort.

Unsere Aufgabe ist zurückgeführt auf die Integration der Gleichung

$$v''(z) + \left(2\sigma + \frac{b}{z}\right) v'(z) = \frac{1}{z^2} E(v),$$

wobei

(6.) $$-E(v) = +\psi_1(z) v'(z) + \psi_2(z) v(z)$$

geschrieben ist und die Koeffizienten im Sektor $\bar{S}$ beschränkt sind.

Wir setzen nun formal an

$$v(z) = \sum_{n}^{0,\infty} \chi_n(z),$$

wobei die χ_n dem System von Rekursionsdifferentialgleichungen

(7.) $$\chi_n''(z) + \left(2\sigma + \frac{b}{z}\right) \chi_n'(z) = \frac{1}{z^2} E(\chi_{n-1}(z))$$

genügen und $\chi_0 \equiv 1$ ist.

Dann ist offenbar, wenn zunächst die gleichmäßige und absolute Konvergenz der zweimalig gliedweise differenzierten Reihe vorausgesetzt wird, $v(z)$ eine Lösung unserer Gleichung.

Man integriere jetzt formal die inhomogene Gleichung (7.) und bestimme χ_n aus χ_{n-1} durch die Formel

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-2\sigma\zeta} \zeta^{-b} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{2\sigma\lambda} \lambda^{b-2} E(\chi_{n-1}(\lambda))\, d\lambda\, d\zeta.$$

Das rechtsstehende Symbol hat zunächst keinen Sinn.

Wir behaupten nun:

Hat $\chi_{n-1}(z)$ einen Sinn und ist es eine im Sektor $\bar{S}$ reguläre analytische Funktion, die dort den Ungleichungen genügt

(8.) $$|\chi_{n-1}(z)| \leqq \frac{K|z|^{-(n-1)}}{(n-1)!};\ |\chi'_{n-1}(z)| \leqq \frac{K|z|^{-(n-1)}}{(n-1)!};\ |\chi''_{n-1}(z)| \leqq \frac{K|z|^{-(n-1)}}{(n-2)!}$$

so hat auch $\chi_n(z)$ einen Sinn und ist eine in $\bar{S}$ reguläre analytische Funktion, die dort den Ungleichungen genügt

$$|\chi_n(z)| < \text{const.}\frac{K|z|^{-n}}{n!};\ |\chi'_n(z)| < \text{const.}\frac{K|z|^{-n}}{n!};\ |\chi''_n(z)| < \text{const.}\ K\frac{|z|^{-1}}{(n-1)!}$$

$K = K_{n-1}$ ist dabei von z unabhängig.

Beweis:

Aus den beiden ersten Ungleichungen von (8.) und aus (6.) folgt

(9.) $$|E(\chi_{n-1}(z))| < CKn\frac{|z|^{-(n-1)}}{(n-1)!}.$$

In dem Integral

$$\varphi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} e^{2\sigma\lambda}\lambda^{b-2}E(\chi_{n-1}(\lambda))\,d\lambda$$

führe der Integrationsweg von ζ aus möglichst bequem zur reellen Achse und auf dieser ins Unendliche. Gemäß unserer Annahme über χ_{n-1} ist der Integrand in $\bar{S}$ analytisch und regulär. Das Integral ist wegen (9.) und (7.) absolut konvergent.

Der Integrand wird ferner in jedem Parallelstreifen endlicher Breite um die negative reelle Achse gleichmäßig klein. Wir können die Integrationslinie auf irgendeine Parallele zur negativen reellen Achse verschieben, insbesondere auch auf die durch $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ führende. Dieser Horizontalstrahl verläuft ja für jeden Punkt ζ ganz in $\bar{S}$.

Es ist also

$$\varphi(\zeta) = \int_{-\infty+i\zeta''}^{\zeta'+i\zeta''} e^{2\sigma\lambda}\lambda^{b-2}E(\chi_{n-1}(\lambda))\,d\lambda.$$

Die Transformation auf die reelle Veränderliche $\lambda' = \lambda - i\zeta''$ ergibt

$$\varphi(\zeta) = e^{(2i\sigma'-2\sigma'')\zeta''}\int_{-\infty}^{\zeta'} e^{2i\sigma''\lambda'}e^{2\sigma'\lambda'}(\lambda' + i\zeta'')^{b-2}E(\chi_{n-1})d\lambda' \qquad (\sigma = \sigma' + i\sigma'').$$

Wegen (9.) ist jetzt

$$|\varphi(\zeta)| < \frac{K}{(n-1)!}\,\text{const.}\ e^{-2\sigma''\zeta''}\cdot J(\zeta'),$$

wobei wir setzen

$$J(\zeta') = \int_{-\infty}^{\zeta'} e^{2\sigma'\lambda'}(\lambda'^2 + \zeta''^2)^{\frac{b'-n-1}{2}}\,d\lambda'.$$

Die Ableitung der Funktion

$$e^{2\sigma'\lambda'}(\lambda'^2 + \zeta''^2)^{\frac{b'}{2}}$$

hat das Vorzeichen der Größe

$$\lambda'^2 + \frac{b'}{\sigma'}\lambda' + \zeta''^2,$$

ist also dauernd positiv, wenn $|\zeta''| \geqq \left|\frac{b'}{2\sigma'}\right|$.

Für

$$|\zeta''| < \frac{b'}{2\sigma'}$$

ist sie auch noch positiv für

$$\lambda' < -\left|\frac{b'}{\sigma'}\right|.$$

Außerhalb des um die negative reelle Achse gelegten Streifens

$$|\zeta''| < \frac{b'}{2\sigma'}$$

gilt also ohne weiteres die Abschätzung

$$(10.) \qquad J(\zeta') < e^{2\sigma'\zeta'}(\zeta'^2 + \zeta''^2)^{\frac{b'}{2}} \int_{-\infty}^{\zeta'} (\lambda'^2 + \zeta''^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\lambda',$$

doch gilt sie auch innerhalb des Streifens, da dort unbedenklich

$$\zeta' < -\left|\frac{b'}{\sigma'}\right|$$

angenommen werden kann. Diese eventuelle Verkleinerung von $\bar{S}$ ist ja belanglos.

Aus (10.) folgt

$$J(\zeta') < e^{2\sigma'\zeta'}(\zeta'^2 + \zeta''^2)^{\frac{b'-n}{2}} \cdot \frac{\text{const.}}{n},$$

also

$$|\varphi(\zeta)| < \text{const.} \frac{K}{n!} e^{-2\sigma''\zeta''} e^{2\sigma'\zeta'} \cdot (\zeta'^2 + \zeta''^2)^{\frac{b'-n}{2}}.$$

Für

$$\chi_n'(\zeta) = e^{-2\sigma\zeta}\zeta^{-b}\varphi(\zeta)$$

folgt daraus die behauptete Ungleichung

$$|\chi_n'(\zeta)| < K \cdot \frac{\text{const.}}{n!} |\zeta|^{-n}.$$

Aus der Gleichung

$$\chi_n''(z) + \left(2\sigma + \frac{b}{z}\right)\chi_n'(z) = \frac{1}{z^2} E(\chi_{n-1})$$

folgt unmittelbar

$$|\chi_n''(z)| < K \cdot \frac{\text{const.}}{(n-1)!} |\zeta|^{-n}.$$

Zur Herleitung der Ungleichung für $\chi_n(z)$ müssen wir noch einmal $\chi_n'(\zeta)$ in etwas anderer Weise abschätzen. Es war

$$J(\zeta') = \int_{-\infty}^{\zeta_1} e^{\sigma'\lambda'}(\lambda'^2 + \zeta''^2)^{\frac{b'-n-1}{2}} \cdot e^{\sigma'\lambda'} d\lambda'.$$

Ganz wie vorhin können wir jetzt sagen, daß in S die Funktion

$$e^{\sigma'\lambda'}(\lambda'^2 + \zeta''^2)^{\frac{b'-n-1}{2}}$$

eine positive Ableitung hat. Also ist

$$J(\zeta') < e^{\sigma'\zeta'}(\zeta'^2 + \zeta''^2)^{\frac{b'-n-1}{2}} \int_{-\infty}^{\zeta'} e^{\sigma'\lambda'} d\lambda'.$$

Das gibt für $\chi_n'(\zeta)$ die Abschätzung

$$|\chi_n'(\zeta)| < K \cdot \frac{\text{const.}}{(n-1)!} |\zeta|^{-(n+1)}.$$

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty}^{z} \chi_n'(\zeta)\, d\zeta$$

hat also einen Sinn. Die Integration läßt sich auch auf irgendeinem anderen in $\bar{S}$ gelegenen Strahl vornehmen, insbesondere auch auf dem Strahl $\zeta = \varrho \cdot e^{i \arg z}$. Also ist

$$\chi_n(z) = \int_{\infty}^{r} \chi_n'(\zeta) e^{i \arg z}\, d\varrho \qquad (|z| = r)$$

$$|\chi_n(z)| < \frac{\text{const.}}{(n-1)!};\ K \cdot \int_{r}^{} \varrho^{-(n+1)}\, d\varrho < \frac{\text{const.}}{n!} K |z|^{-n}.$$

Damit ist auch die Ungleichung für $\chi_n(z)$ bewiesen. Da $\chi_0 \equiv 1$ in $\bar{S}$ regulär ist und dort den Ungleichungen (8.) mit $K = 1$ genügt, so können wir schließen:

Alle $\chi_n(z)$ sind in $\bar{S}$ regulär und genügen dort den Ungleichungen

$$|\chi_n(z)| < \frac{1}{n!}\left|\frac{\text{const.}}{z}\right|^n;\ |\chi_n'(z)| < \frac{1}{n!}\left|\frac{\text{const.}}{z}\right|^n;\ |\chi_n''(z)| < \frac{1}{(n-1)!}\left|\frac{\text{const.}}{z}\right|^n.$$

Es folgt:

im Sektor $\bar{S}$ ist die Reihe

$$v_1(z) = \sum_{n}^{0,\infty} \chi_n(z) \tag{11.}$$

absolut und gleichmäßig konvergent und stellt eine Lösung von (5.) dar; gemäß (4.) ist also

$$v_I(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho_1} v_1(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_{n}^{0,\infty} \chi_n(z) \tag{12.}$$

eine Lösung von (1.) in $\bar{S}$.

§ 2.

(13.) Wir nehmen jetzt an, daß in S kein kritischer Strahl liegt. Auch die Grenze soll nicht kritisch sein.

Der Winkelraum S ist also kleiner als π. Machen wir die Winkelhalbierende von S zur negativen reellen Achse, so fällt $\bar{S}$ mit S zusammen. Die Existenz eines Integrals $v_1(z)$ von (5.) ist also nach (11.) bewiesen. Um ein zweites Integral $v_2(z)$ zu finden, setzen wir an:

$$v_2(z) = v_1(z) \cdot w(z)$$

und erhalten aus (5.) zur Bestimmung von $w(z)$ die folgende Differentialgleichung

$$w''(z) + w'(z)\left(2\sigma + \frac{b}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2} + 2\frac{v_1'}{v_1}\right) = 0.$$

Nun gilt aber gleichmäßig in S

$$\lim_{z=\infty} v_1(z) = 1;\quad |z^2 \cdot v_1'(z)| < \text{const.}$$

Durch eine eventuelle endliche Verkleinerung von S erreichen wir

$$|v_1(z)| > \eta > 0; \quad \left|z^2 \frac{v_1'(z)}{v_1(z)}\right| < \text{const.}$$

Die Differentialgleichung für $w(z)$ läßt sich also schreiben

$$w''(z) + w'(z)\left(2\sigma + \frac{b}{z} + \frac{\psi(z)}{z^2}\right) = 0.$$

Dabei ist $\psi(z)$ in S regulär und beschränkt.

$$w'(z) = e^{-2\sigma z} z^{-b} e^{\int_{-\infty}^{z} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta}$$

$$\left|\int_{-\infty}^{z} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta\right| = \left|\int_{\infty}^{r} \frac{\psi(\varrho e^{ik})}{(\varrho e^{ik})^2} e^{ik} d\varrho\right| < \text{const.} \int_{r}^{\infty} \varrho^{-2} d\varrho < \frac{\text{const.}}{r} = \frac{\text{const.}}{|z|}.$$

Also ist

$$e^{\int_{-\infty}^{z} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta} = 1 + \frac{\varphi_1(z)}{z},$$

wobei in S $\varphi_1(z)$ beschränkt ist.

$$w'(z) = \frac{1}{2\sigma} e^{-2\sigma z} z^{-b}\left(2\sigma + \frac{b}{z}\right) + e^{-2\sigma z} z^{-b} \frac{\varphi(z)}{z} \quad (\varphi(z) \text{ beschränkt}).$$

$$w(z) = e^{-2\sigma z} z^{-b} + \int_{-r_0}^{z} e^{-2\sigma\zeta} \zeta^{-b-1} \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Die Integrationslinie wird so festgelegt:

Sie gehe vom festen Punkte $-r_0$ in S auf dem Kreise $|\zeta| = r_0$ entlang bis zum Punkte $r_0 e^{ik} (k = \arg z)$. Von da führe sie geradlinig zum Punkte $z = re^{ik}$. Das Integral über den Kreisbogen sei J_1. Offenbar ist J_1 beschränkt. Das geradlinige Integral sei mit J_2 bezeichnet.

$$J_2 = \int_{r_0 e^{ik}}^{r e^{ik}} e^{-2\sigma\zeta} \zeta^{-b-1} \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Gemäß (3.) und (13.) ist für alle $\zeta = \varrho e^{ik}$ in S

$$\Re(-2\sigma\zeta) = \varrho \Re(-2\sigma e^{ik}) = \varrho s,$$

wobei

$$s \geqq s_0 = 2|\sigma| \sin \alpha > 0.$$

α bedeutet dabei den kleineren der beiden spitzen Winkel, welche die Grenzstrahlen von S mit der kritischen Geraden bilden. Es ist

$$|J_2| < \int_{r_0}^{r} e^{s\varrho} \varrho^{-b'-1} d\varrho = e^{sr_0} \int_{0}^{r-r_0} e^{s\varrho} (\varrho + r_0)^{-b'-1} d\varrho.$$

Nun hat die Ableitung der Funktion $e^{\frac{s}{2}\varrho}(\varrho + r_0)^{-b'-1}$ das Vorzeichen der Größe $\varrho + r_0 - \frac{2(b'+1)}{S}$, ist also positiv, wenn $r_0 > \frac{2|b'+1|}{S_0}$ gewählt ist. Daher

$$|J_2| < e^{\frac{s}{2}(r+r_0)} r^{-b'-1} \int_{0}^{r-r_0} e^{\frac{s}{2}\varrho} d\varrho < e^{sr} r^{-b'-1} \cdot \frac{2}{S_0}$$

$$w(z) = e^{2\sigma z} z^{-b}[1 + e^{2\sigma z} z^{b}(J_1 + J_2)].$$

Nun ist

$$|e^{2\sigma z} z^b J_2| < \text{const. } r^{-1}$$

$$|e^{2\sigma z} z^b J_1| < \text{const. } e^{-\varepsilon r} r^{b'} < e^{-\varepsilon_0 r} r^{(b'+1)} \text{ const. } r^{-1} < \text{const. } r^{-1}$$

$$w(z) = e^{2\sigma z} z^{-b}\Big(1 + \frac{\psi_1(z)}{z}\Big) \quad [\psi_1(z) \text{ beschränkt.}]$$

$$v_2(z) = v_1(z) \cdot w(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_n^{0,\infty} \chi_n\Big(1 + \frac{\psi_1(z)}{z}\Big).$$

Setzt man

$$\chi_{n,2}(z) = \chi_{n-1} \cdot \frac{\psi_1(z)}{z} + \chi_n,$$

so ist

$$v_2(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}(z).$$

Die Darstellung ist offenbar in S gleichmäßig und absolut konvergent.

Damit ist also, wenn in S kein kritischer Strahl liegt, die Existenz eines zweiten linear unabhängigen Integrals v_2 bewiesen. Ein beliebiges Integral

$$v(z) = c_1 v_1(z) + c_2 v_2(z)$$

läßt in S die Darstellung zu

$$v(z) = c_2 e^{-\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_n^{0,\infty} \Pi_n(z). \tag{14.}$$

In der Tat ist

$$v(z) = c_2 e^{-\sigma z} z^{\varrho}\Big(\sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}(z) + e^{-2\sigma z} z^b \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,1}(z)\Big)$$

$$|e^{2\sigma z} z^b \Sigma \chi_{n,1}(z)| < \text{const. } |z|^{-1},$$

also die Behauptung bewiesen für

$$\Pi_1 = \chi_{1,2}(z) + e^{2\sigma z} z^b \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,1}(z)$$

$$\Pi_n = \chi_{n,2}(z) \qquad (n > 1).$$

§ 3.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise schicken wir die folgenden Erklärungen voraus:

(15.) Ist S ein Sektor, dessen einer Grenzstrahl ein Strahl der kritischen Geraden ist, so ist unter S^* ein Teilsektor zu verstehen, der aus S durch Ausschluß eines beliebig kleinen Winkelraums an dem kritischen Grenzstrahl entstanden ist.

Unter der zu einem Strahl von der Richtung φ_0 gehörenden Halbebene verstehen wir die Halbebene

$$\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq \varphi_0 + \frac{\pi}{2}.$$

Es möge nun nur einer der beiden kritischen Strahlen außerhalb S, der andere dagegen im Innern von S liegen. Durch diesen Strahl wird S in zwei Sektoren S_1 und S_2 zerlegt, deren Öffnungswinkel offenbar kleiner als π sind.

Wir drehen jetzt die z-Ebene so, daß die Winkelhalbierende von S_1 negative reelle Achse wird. Dann gibt es gemäß (12.) in dem Teil von S, der in der Halbebene $\Re(z) \leqq 0$ liegt, ein Integral

$$v_{\mathrm{I}}(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_{n}^{0,\infty} \chi_{n,1}(z).$$

σ ist dabei diejenige der beiden Wurzeln $\pm\sqrt{-a_{2,0}}$, für die $e^{\sigma z}$ auf der negativ reellen Achse gegen Null konvergiert. Das Konvergenzgebiet von v_{I} enthält sicherlich S_1, wird aber im allgemeinen noch nicht ganz S umfassen. $v_{\mathrm{I}}(z)$ wird offenbar in S_1^* gegen Null konvergieren, dagegen in dem zu S_2 gehörigen Teil des Konvergenzgebietes groß werden. An Stelle der Winkelhalbierenden von S_1 könnten wir auch irgendeinen Strahl in S_1 zur negativ reellen Achse machen und für die zugehörige Halbebene ein Integral finden. Dieses Integral wird auch innerhalb S gegen Null konvergieren, woraus wir schon auf seine Identität mit $v_{\mathrm{I}}(z)$ schließen könnten. In der Tat läuft es gemäß dem *Cauchy*schen Integralsatze auf dasselbe hinaus, wenn wir in dem Ausdrucke für $\chi_{n,1}(z)$ die Integrationswege auf irgendeinem Strahl von S_1 statt auf der reellen Achse ins Unendliche führen.

Also wird die Reihe

$$\Sigma \chi_{n,1}(z)$$

in der zum Integrationsstrahl gehörigen Halbebene absolut und gleichmäßig konvergieren. Je weniger der Integrationsstrahl vom kritischen Strahl abweicht, eine um so größere Erweiterung des Konvergenzgebietes erhalten wir. Doch brauchen wir nicht unbedingt schon ganz S als Konvergenzgebiet zu erhalten. Unsere Figur zeigt gerade diesen ungünstigen Fall: S_3 ist das Konvergenzgebiet der Reihe.

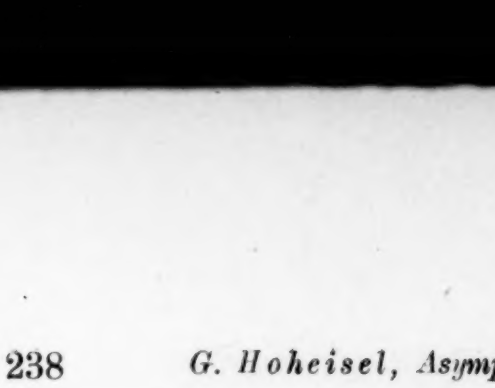


Fig. 2.

Eine ganz entsprechende Betrachtung können wir nun machen, indem wir von S_2 ausgehen. Wir finden dann ein Integral, das innerhalb S_2 gegen Null konvergiert, dagegen in dem zu S_1 gehörigen Teile des Konvergenzgebietes groß wird. S_4 wird sich als Konvergenzgebiet dieses Integrals ergeben, das die Gestalt hat

$$v_{\mathrm{II}}(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_{n}^{0,\infty} \chi_{n,2}(z).$$

Wir können nun die Konvergenzgebiete von v_{I} und v_{II} auf S ausdehnen wie unsere Behauptung verlangt. v_{I} und v_{II} sind offenbar linear unabhängig.

In S_1^* (siehe (15.)) wird nach (14.) jedes von $v_{\mathrm{I}}(z)$ unabhängige Integral die Darstellung zulassen

$$c e^{-\sigma z} z^{\varrho} \sum_{n}^{0,\infty} \Pi_n(z).$$

Das wird auch insbesondere von v_{II} gelten, wobei $c = 1$ ist. Die Gebiete S_1^* und S_4 überdecken einander. Verzichten wir also auf die Einheitlichkeit der expliziten Darstellung, so ist damit bewiesen:

Es gibt ein Integral

$$v_{II}(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}(z) \qquad \chi_{0,2} = 1,$$

wobei in S die Ungleichungen gelten

$$|\chi_{n,2}(z)| < \frac{1}{n!}\left|\frac{C}{z}\right|^n. \tag{16.}$$

Die χ sind dabei nicht in ganz S explizit dieselben Funktionen, sondern haben zweierlei Bedeutungen [2]). Das ist aber schließlich ohne Belang, da diese Funktionen für uns hauptsächlich nur als Repräsentanten der Ungleichungen (16.) in Betracht kommen. Ganz ebenso läßt sich das Konvergenzgebiet S_3 von v_1 auf S ausdehnen, wobei wir wieder auf die Einheitlichkeit der expliziten Darstellung verzichten müssen. Wir können jetzt sagen:

Liegt ein kritischer Strahl im Innern von S, dagegen der andere außerhalb S, so gibt es in S zwei Integrale

$$\begin{aligned} v_I(z) &= e^{\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,1}(z) \\ v_{II}(z) &= e^{-\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}(z). \end{aligned} \tag{17.}$$

Dabei ist $\chi_{0,1} = \chi_{0,2} \equiv 1$ und in S gelten die Ungleichungen

$$|\chi_{n,}(z)| < \frac{1}{n!}\left|\frac{C}{z}\right|^n.$$

Liegt der andere kritische Strahl nicht außerhalb S, sondern gerade auf der Grenze von S, so daß also etwa S_1 eine von der kritischen Geraden begrenzte Halbebene ist, so ändert sich die Aussage über $v_I(z)$ nicht; dagegen gilt die Behauptung über $v_{II}(z)$ nur in S^*.

Es bleibt nur noch der Fall zu erledigen, daß beide kritische Strahlen im Innern von S liegen. Es gibt dann, da die Winkelöffnung von S kleiner als 2π sein soll, eine ganz bestimmte, von der kritischen Geraden begrenzte Halbebene H, die ganz in S liegt. Die Winkelhalbierende dieser Halbebene machen wir zur negativ reellen Achse. Es gibt dann ein Integral

$$v_I(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,1}(z),$$

das innerhalb H klein bleibt und zunächst nur in H konvergiert. Führen wir wieder die Integrationswege statt auf der negativ reellen Achse auf irgendeinem Strahle in H entlang, so erzielen wir eine Ausdehnung des Konvergenzgebietes auf $S_3 (S_3 = S_2 + 90^0)$, das jedoch, wie Figur 1 (S. 230) zeigt, nicht ganz S zu umfassen braucht.

Nun können wir auf den Sektor S_1^*, der ja nur einen kritischen Strahl enthält, das Resultat (17.) anwenden. Damit erreichen wir unter Verzicht auf die Einheitlichkeit der expliziten Darstellung die Erweiterung des Konvergenzgebietes von $v_I(z)$ auf ganz S.

Ferner können wir nach (17.) sagen: es gibt ein Integral in S_1^*

---

[1]) Doch könnte man unter Heranziehung *Lindelöf*scher Sätze die Konvergenz jeder der beiden Darstellungen in ganz S erweisen.

$$v_{\mathrm{II},1}(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_{n}^{0,\infty} \chi^1_{n,2}(z),$$

das in $S_4 (S_1 = S_4 + H)$ klein bleibt.

Ganz ebenso können wir schließen: es gibt ein Integral in S_2^*

$$v_{\mathrm{II},2}(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_{n}^{0,\infty} \chi^2_{n,2}(z),$$

das in $S_5 (S_2 = S_5 + H)$ klein bleibt.

Damit sind die Behauptungen der Einleitung erwiesen. Es bleibt noch übrig, diese Resultate auf die Unbestimmtheitsstelle vom Range 1 anzuwenden. Es ergeben sich, wie schon bemerkt, die von *Horn* in Crelle Bd. 133 erzielten Resultate. Die imaginäre Achse denken wir uns als kritische Gerade.

Es gibt im Gebiet

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqq \arg z \leqq \frac{5\pi}{2} - \varepsilon \qquad |z| \geqq r_0$$

ein Integral

$$v_{\mathrm{I}}(z) = e^{\sigma z} z^{\varrho_1} \sum_{n}^{0,\infty} \chi_{n,1}(z).$$

Die reelle Größe σ ist dabei von positivem Vorzeichen. Entsprechend gibt es im Gebiet

$$-\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \leqq \arg z \leqq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

ein Integral

$$v_{\mathrm{II}}(z) = e^{-\sigma z} z^{\varrho_2} \sum_{n}^{0,\infty} \chi_{n,2}(z).$$

Über die explizite Form der χ_n gilt ähnliches wie früher.

Nehmen wir nun an, das allgemeine Integral der Differentialgleichung ist eine in $z = \infty$ eindeutige Funktion. Dann ist auch $v_{\mathrm{I}}(z)$ und ebenso $v_{\mathrm{I}}(z)\mathrm{e}^{-\sigma z}$ eine in $z = \infty$ eindeutige Funktion und läßt also für $|z| \geqq r_0$ die *Laurent*sche Entwicklung zu

$$v_{\mathrm{I}}(z)\, e^{-\sigma z} = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) + \mathfrak{Q}(z).$$

Dabei ist $\mathfrak{Q}(z)$ eine ganze transzendente Funktion!

Nun gilt aber offenbar für große $|z|$ die Ungleichung

$$|\mathfrak{Q}(z)| < C \cdot |z|^{|\varrho_1|}.$$

Also ist $\mathfrak{Q}(z)$ ein Polynom.

Damit ist der in der Einleitung erwähnte Satz erwiesen, der den *Halphen*schen Satz offenbar als Spezialfall enthält. In der Tat: sind die Integrale $v_{\mathrm{I}}(z)$ und $v_{\mathrm{II}}(z)$ in der ganzen Ebene eindeutig und haben sie im Endlichen nur Stellen der Bestimmtheit, so können dort nur Pole als Singularitäten auftreten; also sind die Funktionen

$$v_{\mathrm{I}}(z)\, e^{-\sigma z} \quad v_{\mathrm{II}}(z)\, e^{\sigma z}$$

rational.

§ 4.

Bisher wurde immer angenommen, daß in der Differentialgleichung (1.) die Größe $a_{2,0} \neq 0$ ist. Lassen wir diese Annahme fallen und erweitern wir dafür die

Voraussetzungen über die Koeffizienten etwas, so werden wir ähnlich genaue Aussagen wie bisher machen können. Wir wollen zunächst annehmen, daß auch

$$a_{2,1} = 0$$

ist. Die Differentialgleichung (1.) sehe so aus:

$$(18.) \qquad v''(z) + v'(z)\left(\frac{a_{1,1}}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2}\right) + v(z)\left(\frac{a_{2,2}}{z^2} + \frac{\psi_2(z)}{z^3}\right) = 0.$$

$\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ sollen in S beschränkt sein. Wir setzen

$$v(z) = z^\varrho\, w(z).$$

Dann ist

$$(19.) \qquad w''(z) + w'(z)\left(\frac{2_\varrho + a_{1,1}}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2}\right) + w(z)\left(\frac{a_{2,2} + \varrho(\varrho - 1) + \varrho\, a_{1,1}}{z^2} + \frac{\varphi_3(z)}{z}\right) = 0,$$

wobei

$$\psi_3(z) = \varrho \cdot \psi_1(z) + \psi_2(z)$$

auch beschränkt bleibt.

Wird ϱ als eine Wurzel der Gleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + a_{1,1} \cdot \varrho + a_{2,2} = 0$$

bestimmt und

$$2_\varrho + a_{1,1} = b$$

gesetzt, so ist die Aufgabe auf die Lösung der Gleichung

$$w''(z) + w'(z)\left(\frac{b}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2}\right) = \frac{1}{z^3} E(w)$$

zurückgeführt, wobei

$$E(w) = -\psi_3(z) \cdot w(z)$$

geschrieben ist. Wir setzen jetzt formal an

$$(20.) \qquad w(z) = \sum_n^{0,\infty} \chi_n(z),$$

wobei

$$\chi_0 \equiv 1$$

und

$$\chi_n'' + \left(\frac{b}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2}\right)\chi_n' = \frac{1}{z^3} E(\chi_{n-1})$$

sein soll.

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (20.) und der ein- und zweimal gliedweise differenzierten Reihe ist zu zeigen. Wie früher läßt sich die Ebene so drehen, daß die negative reelle Achse Winkelhalbierende von S ist. Durch formale Integration ergibt sich

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty}^{z} \zeta^{-b}\, e^{-\int_\infty^\zeta \frac{\psi_1(\zeta)}{\lambda^2}\, d\lambda} \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda^b\, e^{-\int_x^\lambda \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta} \frac{1}{\lambda^3} E(\chi_{n-1}(\lambda))\, d\lambda\, d\zeta.$$

Wir behaupten jetzt:

Hat das Symbol $\chi_{n-1}(z)$ einen Sinn, ist es eine in S analytische und reguläre Funktion, die dort den Ungleichungen genügt

$$(21.)\quad |\chi_{n-1}(z)| \leqq K\cdot\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^2 |z|^{-(n-1)};\ |\chi'_{n-1}(z)| \leqq K_{(n-1)}\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^2 |z|^{-n};$$

$$|\chi''_{n-1}(z)| \leqq K\left(\frac{1}{(n-2)!}\right)^2 |z|^{-(n+1)};$$

dann hat auch $\chi_n(z)$ einen Sinn, ist eine in S analytische reguläre Funktion und genügt dort den Ungleichungen

$$|\chi_n(z)| < C\cdot K\left(\frac{1}{n!}\right)^2 |z|^{-n};\ |\chi'_n(z)| < C\cdot K\, n\left(\frac{1}{n!}\right)^2 |z|^{-(n+1)};\ |\chi''_n(z)| < C\cdot K\left(\frac{1}{(n-1!)}\right)^2 |z|^{-(n+2)}.$$

Den Beweis können wir mit Rücksicht auf die früheren Darlegungen kürzer fassen.

Es ist leicht zu sehen, daß in S

$$\left|e^{-\int_\infty^\zeta \frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda}\right| < C \text{ und } \left|e^{-\int_\infty^\lambda \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta}\right| < C$$

ist.

Benutzen wir ferner die Abschätzung (21.) und wenden auf das Integral über $d\lambda$ den *Cauchy*schen Integralsatz an, so ergibt sich leicht

$$|\chi'_n(\zeta)| < C\cdot K\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+2}\,|\zeta|^{-(n+1)}.$$

Daraus folgt wieder unter Anwendung des *Cauchy*schen Satzes

$$|\chi_n(z)| < C\cdot K\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^2 \cdot \frac{1}{(n+2)(n+1)}\cdot |z|^{-n}.$$

Dafür kann man offenbar schreiben

$$|\chi_n(z)| < C\cdot K\cdot\left(\frac{1}{n!}\right)^2 |z|^{-n};\ |\chi'_n(z)| < C\cdot K\cdot\left(\frac{1}{n!}\right)^2 \cdot n\,|z|^{-(n+1)}.$$

Aus der die χ_n definierenden Differentialgleichung folgt sofort die behauptete Ungleichung für $\chi''_n(z)$.

Sind also die Wurzeln der zur Bestimmung von ϱ dienenden Gleichung verschieden, so haben wir damit die Existenz zweier Integrale

$$v_1(z) = z^{\varrho_1}\sum_n^{0,\infty} \chi_{n,1}(z)$$

$$v_{II}(z) = z^{\varrho_2}\sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}(z)$$

bewiesen, die in S gleichmäßig und absolut konvergent sind.

Hat dagegen die Gleichung

$$\varrho(\varrho-1) + a_{1,1}\,\varrho + a_{2,2} = 0$$

eine Doppelwurzel, so haben wir zunächst nur ein Integral

$$w_0 = \Sigma\,\chi_{n,1}(z)$$

der Differentialgleichung (19.). Setzen wir jetzt

$$w = w_0\cdot u,$$

so ergibt sich für u die Differentialgleichung

$$u'' + u'\left(\frac{1}{z} + \frac{\psi(z)}{z^2}\right) = 0,$$

wobei $\psi(z)$ beschränkt ist. Dabei ist benutzt, daß in S

$$\left|\frac{w_0'}{w_0}\right| < \frac{C}{z^2}$$

ist, falls nur $|z|$ nicht zu klein ist.

Daraus folgt

$$u' = z^{-1} \cdot \sum_n^{0,\infty} \varphi_n(z),$$

wobei

$$e^{-\int_{-\infty}^{z} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta} = 1 - \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots$$

gesetzt ist.

$$\varphi_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\int_{-\infty}^{z} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta\right)^n$$

$$|\varphi_n(z)| < \frac{1}{n!}\left|\frac{C}{z}\right|^n.$$

Daraus folgt

$$u = \log z + \psi_1(z) + \psi_2(z) + \cdots \quad + c$$

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi_n(\zeta) \cdot \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$$

$$|\psi_n(z)| < \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left|\frac{C}{z}\right|^n.$$

Also können wir sagen:

im Falle einer Doppelwurzel von ϱ hat die Differentialgleichung (18.) zwei Integrale

$$v_{\mathrm{I}}(z) = z^{\varrho} \cdot \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,1}(z) \quad = z^{\varrho} \cdot w_0(z)$$

$$v_{\mathrm{II}}(z) = \log z \cdot v_{\mathrm{I}}(z) + z^{\varrho}\, w_1(z) = z^{\varrho}\,(\log z \cdot w_0 + w_1)$$

$$w_1(z) = \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}(z).$$

Die Verhältnisse sind ganz ebenso wie bei einer Stelle der Bestimmtheit. Das ist in der Tat auch nur ein Spezialfall der vorangegangenen Entwicklungen. Die $\chi_n(z)$ sind in diesem Falle regulär in $z = \infty$.

Es sei jetzt

$$a_{2,1} \neq 0.$$

Nach dem von *Fabry* für Unbestimmtheitsstellen angewandten Verfahren machen wir die Transformation

$$z = t^2$$

genauer

$$t = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}$$

Es ist dann

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dt} : \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2t} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2t} \cdot \frac{dv}{dt}\right) : \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2t} \cdot \left(\frac{d^2v}{dt^2} \cdot \frac{1}{2t} - \frac{1}{2t^2}\frac{dv}{dt}\right).$$

Die Differentialgleichung (18.) geht über in die folgende

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt}\left(-\frac{1}{t} + \frac{2a_{1,1}}{t} + \frac{2\psi_1(t^2)}{t^3}\right) + v\left(4a_{2,1} + \frac{4a_{2,2}}{t^2} + \frac{4\psi_2(t^2)}{t^4}\right) = 0.$$

Wir können jetzt wieder die Bedingung für den Koeffizienten von $v(z)$ einschränken und zu der früheren Annahme

$$\frac{a_{2,1}}{z} + \frac{\psi_2(z)}{z^2}$$

zurückkehren. Dann sieht die Differentialgleichung so aus:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt}\left(\frac{2a_{1,1} - 1}{t} + \frac{\psi_3(t)}{t^3}\right) + v\left(4a_{2,1} + \frac{\psi_4(t)}{t^2}\right) = 0.$$

Da $a_{2,1} \neq 0$ ist, können wir einfach die in der Einleitung erwähnten Resultate auf diesen Fall übertragen.

Die Veränderliche t bewegt sich dabei in einem Sektor T, dessen Winkelöffnung gleich der halben Winkelöffnung von S, also kleiner als π ist. Da also nicht beide Strahlen der kritischen Gerade $\Re(\sigma t) = 0$, $\sigma = \pm 2\sqrt{-a_{2,1}}$ in T liegen, so erhalten wir zwei Integrale

$$v_{\mathrm{I}}(t) = e^{\sigma t} t^{\varrho_1} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n)1}(t)$$

$$v_{\mathrm{II}}(t) = e^{-\sigma t} t^{\varrho_1} \sum_n^{0,\infty} \chi_{n,2}(t).$$

Die Reihen

$$\Sigma\chi_n(t)$$

sind dabei in T gleichmäßig und absolut konvergent. Es ist leicht, diese Resultate auf die Veränderliche z zu übertragen.

Es ist auch klar, daß jener Satz, der als Spezialfall den *Halphen*schen enthielt, für den Fall der Doppelwurzel (d. h. $a_{2,0} = 0$) gültig bleibt.

Der allgemeine Fall einer Differentialgleichung n-ter Ordnung erfordert keine anderen Methoden und gibt auch völlig durchsichtige Resultate, solange die entsprechende charakteristische Gleichung n-ten Grades für σ keine mehrfachen Wurzeln hat. Bei mehrfachen Wurzeln ergeben sich aber stoffliche Schwierigkeiten wegen der Mannigfaltigkeit aller möglichen Fälle. Bereits entsprechende Untersuchungen im Reellen (*Fabry* usw.) machen dies offenbar.

Der Wertevorrat von Lösungen linearer Differentialgleichungen.

Von Herrn *G. Hoheisel* in Breslau.

In den Berichten der Berliner Akademie (Juli 1923) habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $f(z)$ eine in der Halbebene $\Im(z) > 0$ reguläre analytische und einschließlich der reellen Achse stetige Funktion. Es genüge $f(z)$ ferner den Bedingungen

1. für $\Im(z) > 0$ sei $|f(z)| < e^{k|z|}$ (k beliebig groß, aber fest),
2. für positive reelle z sei $f(z)$ beschränkt,
3. für genügend große negative reelle z soll sein

$$|f(z)| < e^{\eta z} \qquad (\eta > 0, \text{ beliebig klein aber fest}).$$

Dann ist

$$f(z) \equiv 0.$$

Die Bedingung (1.) braucht nur erfüllt zu sein auf einer Kurvenschar $\mathfrak{C}_\nu$, deren Längen $\mathfrak{L}_\nu$ der Bedingung

$$|\mathfrak{L}_\nu| < e^{\varrho\varrho_\nu};\ \varrho_\nu \to \infty$$

genügen, wenn ϱ_ν die minimale Entfernung der Kurve $\mathfrak{C}_\nu$ vom Nullpunkt bezeichnet. Die $\mathfrak{C}_\nu$ führen von der negativen zur positiven reellen Achse.

Es sei hier eine Anwendung dieses Satzes gegeben die unmittelbar an Resultate anknüpft, über welche ich in der voranstehenden Arbeit berichtet habe und welche sich auf das asymptotische Verhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen in der Nähe eines wesentlich singulären Punktes beziehen. Wir gehen aus von der Differentialgleichung.

$$v''(z) + p_1(z)v'(z) + p_2(z)v(z) = 0.$$

In einem Sektor S

$$\varphi_0 \leqq \arg z \leqq \varphi_1$$

sei für große $|z|$

$$p_1(z) = \frac{a_{1,1}}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^{1+\gamma}};\ p_2(z) = a_0 + \frac{a_{1,2}}{z} + \frac{\psi_2(z)}{z^{1+\gamma}};\ (\gamma > 0)$$

$a_0 \neq 0$; $\psi_\nu(z)$ in S beschränkt und regulär.

Ohne Einschränkung läßt sich $a_0 = -1$ annehmen. Die Öffnung des Sektors S $\varphi_1 - \varphi_0$ sei größer als π. Dann liegt sicherlich wenigstens ein Strahl der imaginären Achse in S. Es sei ferner H eine in S gelegene Halbebene, die einen Strahl der

imaginären Achse — er heiße jetzt kurz kritischer Strahl — im Innern enthält. Nach der eben erwähnten Arbeit gibt es dann zwei Integrale $v_1(z)$ und $v_2(z)$, die in H die Darstellung zulassen

$$v_1(z) = e^z z^{\varrho_1}(1 + \varepsilon_1(z)); \; v_2(z) = e^{-z} z^{\varrho_2}(1 + \varepsilon_2(z)),$$

wobei gleichmäßig $\lim_{|z|=\infty} \varepsilon_\nu(z) = 0$ ist.

Diese beiden Integrale lassen offenbar den Wert Null aus. Wir behaupten jetzt:

Jedes andere Integral

$$v(z) = c_1 v_1(z) + c_2 v_2(z) \quad (c_1 \neq 0, \; c_2 \neq 0)$$

nimmt jeden Wert a unendlich oft an und zwar, wie man sofort sieht in jedem noch so kleinen Winkelraum um den kritischen Strahl.

Zum Beweise sei ein kleiner Winkelraum S_ε von der Öffnung ε um den kritischen Strahl ausgeschlossen. In dem übrigen Teil H_1 von H ist offenbar $|v(z)| > e^{k|z|}$ ($k = k(\varepsilon)$ feste positive Zahl). Ließe nun $v(z)$ einen Wert a [1]) aus, so wäre die Funktion

$$w_a(z) = \frac{1}{v(z) - a}$$

in H regulär. Sie genügt in H_1 der Ungleichung

$$|w_a(z)| < e^{-kz} \cdot \text{const.}$$

Dagegen wird $v(z)$ in S_ε dem Werte a sehr nahe kommen. Gibt es aber Wege $\mathfrak{C}_\nu$ in S_ε, auf denen $v(z)$ in gehörigem Abstand von a bleibt

$$|v(z) - a| > \delta \text{ oder wenigstens } |v(z) - a| > e^{-\alpha|z|} \; (\alpha > 0)$$

so daß also dort

$$|w_a(z)| < \frac{1}{\delta} \text{ bzw. } e^{\alpha|z|},$$

so können wir mit Rücksicht auf die Zusatzbemerkung den anfangs zitierten Satz auf $w_a(z)$ anwenden und erhalten den Widerspruch

$$w_a(z) \equiv 0.$$

Wegen der Willkür von c_1 und c_2 genügt es $a = 1$ und $a = 0$ anzunehmen. Für jede komplexe Größe z bezeichne z' den Realteil, z'' den Imaginärteil. Ferner sei [2]):

$$z = r e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}, \; c_1 = k_1 e^{i\lambda_1}, \; c_2 = k_2 e^{i\lambda_2}; \; c_1 e^z z^{\varrho_1} = \Re_1 + i\Im_1 = \mathfrak{A}_1 e^{i\mu_1};$$
$$c_2 e^{-z} z^{\varrho_2} = \Re_2 + i\Im_2 = \mathfrak{A}_2 e^{i\mu_2}.$$

Wir wollen nun Wege in S_ε und zwar Querbalken $\mathfrak{Q}_\nu$ — definiert durch $z'' = q_\nu$ — finden, auf denen beide Summanden $c_1 v_1(z)$ und $c_2 v_2(z)$ negative Realteile haben, erst recht also auch $v(z)$. Sicher ist dann auf $\mathfrak{Q}_\nu$

$$|v(z) - 1| > 1 \text{ und etwa } |v(z)| > e^{-2|z|}.$$

---

[1]) Endlich viele a-Stellen lassen sich durch Hinausrücken der Grenzgeraden von H beseitigen.

[2]) Zur Fixierung werde die positive imaginäre Achse als kritischer Strahl angenommen.

Die letzte Ungleichung gilt nämlich für $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Außerdem ist aber auf $\mathfrak{Q}_\nu$ sogar $|\cos\mu_1|$ und $|\cos\mu_2|$ größer als $\frac{1}{2}$, sie gilt also für $v(z)$. Das sind die gewünschten Ungleichungen. Denken wir uns diese Querbalken als Kreisbogen durch H_1 weitergeführt, so ist auf jedem solchen Kurvenweg $\mathfrak{C}_\nu$

$$|w_1(z)| < 1 \text{ und } |w_0(z)| < e^{2|z|},$$

also unser Satz anwendbar und der Widerspruch herbeigeführt. Nun ist, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$\mu_1 = \lambda_1 + z'' + \varrho_1'' \log z'' + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\varrho_1' + \varrho_1'' \log\cos\varphi$$

$$\mu_2 = \lambda_2 - z'' + \varrho_2'' \log z'' + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\varrho_2' + \varrho_2'' \log\cos\varphi$$

$$\mathfrak{S} = \mu_1 + \mu_2 = (\varrho_1'' + \varrho_2'')\log z'' + \varphi(\varrho_1' + \varrho_2') + (\varrho_1'' + \varrho_2'')\log\cos\varphi + \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a} = \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\pi}{2}(\varrho_1' + \varrho_2').$$

Da $|\varphi|$ in S_ε unterhalb ε bleibt, so können wir auch schreiben

$$(\varrho_1'' + \varrho_2'')\log z'' = \mathfrak{S} - a - \delta(\varphi),$$

wobei $\delta(\varphi)$ klein in S_ε bleibt. Es sei nun $\varrho_1'' + \varrho_2'' \neq 0$ etwa $\varrho_1'' + \varrho_2'' > 0$. Es soll sein

$$\mathfrak{S} = 2\nu\pi + t\cdot\frac{\pi}{2};\ 0 < t < 1,$$

t wird noch bestimmt.

$$\log z'' = \frac{2\pi\nu - \mathfrak{a} + t\cdot\frac{\pi}{2} - \delta(\varphi)}{\varrho_1'' + \varrho_2''}.$$

Wir setzen

$$t = t(\varphi) = \frac{2}{\pi}\delta(\varphi) + t_0.$$

Da wir $\frac{2}{\pi}|\delta(\varphi)| < \frac{1}{4}$ annehmen können, so bleibt t im Intervall $(0, 1)$, wenn t_0 das Intervall $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ durchläuft.

$$z'' = z''(\nu, t_0)$$

durchläuft aber dabei ein mit ν immer größer werdendes Intervall. Dasselbe gilt von der Größe μ_1 [1]). Insbesondere wird von einem gewissen ν ab μ_1 ein Intervall von einer Länge größer als 2π durchlaufen, wenn t_0 von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{3}{4}$ geht. Wir können t_0 also so festlegen, daß für $\varphi = 0$

$$\sin\mu_1 = \cos\mu_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

genau und für kleine φ angenähert gültig ist. Dann ist angenähert

[1]) Die Abhängigkeit der Größe μ_1 von φ kann, wie der Leser prüfen mag, unbedenklich außeracht gelassen werden.

$$\cos\mu_2 = \cos\left(2\nu\pi + t\cdot\frac{\pi}{2} - \mu_1\right) = \cos t\cdot\frac{\pi}{2}\cos\mu_1 + \sin t\cdot\frac{\pi}{2}\sin\mu_1 =$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos t\cdot\frac{\pi}{2} + \sin t\cdot\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Auf den eben definierten Querbalken $\mathfrak{Q}_\nu$ ist

$$\Re_1 \backsim \Im_1 < 0 \text{ und } |\Re_2| > |\Im_2|.$$

Also ist $-\varepsilon_1(z) = \varepsilon_1'(z) + i\varepsilon_1''(z)$ geschrieben —

$$\Re(c_1 v_1(z)) \backsim \Re_1(1 + \varepsilon_1' - \varepsilon_2'')$$
$$\Re(c_2 v_2(z)) = \Re_2(1 + \varepsilon_2') - \Im_2\varepsilon_1''.$$

Bei genügend großem ν, d. h. genügend großem z sind auf $\mathfrak{Q}_\nu$ diese beiden Größen sicherlich negativ.

Es bleibt noch der Fall $\varrho_1'' + \varrho_2'' = 0$ zu erledigen. Es ist dann

$$\mu_1 + \mu_2 = \mathfrak{a} + \varphi(\varrho_1' + \varrho_2').$$

Ist $a \not\equiv \pi$ mod. (2π), so gibt es in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ einen Punkt $\overline{\mu_1}$, so daß auch für $\overline{\mu_2} = \overline{\mu_1}$ $-\mathfrak{a}\cos\overline{\mu_2}$ negativ wird. Denken wir uns $z'' = \mathfrak{q}_\nu$ jetzt so gewählt, daß für $\varphi = 0$

$$\mu_1 = 2\nu\pi + \overline{\mu_1}$$

wird, so werden wieder, da sich φ nur wenig ändert, $\cos\mu_1$ und $\cos\mu_2$ beide negativ sein. Außerdem werden auf $\mathfrak{Q}_\nu$ die Größen

$$\left|\frac{\Im_1}{\Re_1}\right| \text{ und } \left|\frac{\Im_2}{\Re_2}\right|$$

beschränkt bleiben, weil wegen der geringen Änderung von φ $\cos\mu_1$ und $\cos\mu_2$ nicht Null werden. Auch dann sind bei großem ν

$$\Re(c_1 v_1(z)) \text{ und } \Re(c_2 v_2(z))$$

negativ.

Ist $a \equiv \pi$ mod. 2π, so nehme man $e^{i\sigma}v(z)$ statt $v(z)$ und untersuche die Größen

$$|e^{i\sigma}v(z) - e^{i\sigma}| \text{ und } |e^{i\sigma}v(z)|,$$

wobei $\cos\sigma$ positiv sei.

Statt $\mathfrak{a}$ erscheint dann die Größe $\mathfrak{a} + 2\sigma = \bar{\mathfrak{a}}$ und wir können annehmen $\bar{\mathfrak{a}} \not\equiv \pi$ mod. 2π. Wegen $\cos\sigma > 0$ bleibt der alte Widerspruch erhalten.

Von der Umkehrbarkeit des Parallelismus in der nichteuklidischen Ebene.

Von Herrn *E. Roeser* aus Bottrop.

Einleitung.

Zieht man zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt die Parallele, so wird die Neigung der beiden Linien ausgedrückt durch den Parallelwinkel oder das dazugehörige Lot, man benutzt also eine dritte Gerade. Es zeigt sich, daß man statt dessen auch direkt den der Null zustrebenden Winkel im unendlich fernen Teil der Ebene verwenden kann. Hat man mehrere Parallele, so bilden die Grenzwerte der Quotienten aus den trigonometrischen Funktionen dieser Winkel bestimmte endliche Größen. Es ist außerdem möglich, wie im folgenden gezeigt werden soll, diese Grenzwerte im Endlichen zu diskutieren, indem man den Schnittpunkt zweier Geraden festhaltend, ihren Winkel beständig verkleinert, ohne daß die Geraden in eine zusammenfallen. Legt man um den Schnittpunkt einen Kreis, so erreicht man diesen Zweck wenn man den Winkel der Geraden und den Radius in funktionelle Abhängigkeit bringt und den Radius über alle Grenzen wachsen läßt.

I.

Es sei BD die Seite eines dem Kreise mit dem Radius α einbeschriebenen regulären Vielecks. In den Eckpunkten denke man sich die Tangenten gezogen, so entsteht das umbeschriebene n-Eck. Läßt man den Radius immer größer werden, so werden die Seiten des äußeren n-Ecks schließlich parallel. In diesem Fall ist BOA Parallelwinkel zu α, so daß die Gleichung besteht:

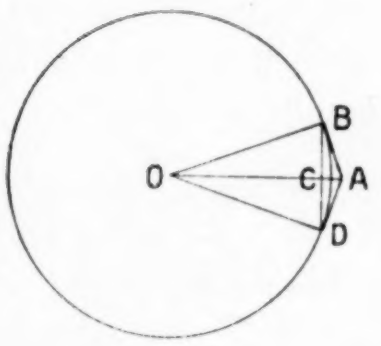


Fig. 1

$\operatorname{th} \alpha = \cos \frac{\pi}{n}$, α ist also Funktion von n. Die so definierten Kreise mögen Parallelkreise heißen. OBC der halbe n-Eckswinkel sei ψ. Dann ist im Dreieck OBC:

$$\cot \psi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{ch} \alpha, \text{ da } ch\, \alpha = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \cos \frac{\pi}{n}. \tag{1.}$$

Setzt man $DB = 2\sigma$, so ist:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{sh\, \sigma}{sh\, \alpha} = \operatorname{sh} \sigma \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

$$(2.) \qquad \operatorname{sh}\sigma = \cos\frac{\pi}{n}.$$

Also für jedes n:

$$(3.) \qquad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{sh}\sigma.$$

Und für $n = \infty$:

$$(4.) \qquad \lim_{n=\infty} \operatorname{tg}\psi = \lim_{n=\infty} \operatorname{sh}\sigma = 1.$$

Nun wird aber für $\alpha = \infty$ der Parallelkreis zum Grenzkreis, also der zu σ gehörige Grenzkreisbogen gleich 1. In der Tat ist ja derjenige Grenzkreisbogen der Einheit gleich, bei dem die Achse in dem einen Endpunkt parallel ist zur Tangente im andern. Somit erhält man alle Eigenschaften des Grenzkreises, er liegt jedoch im Unendlichen. *BO* und *AO* bilden den Winkel Null miteinander, es sind Parallele die im Endlichen zusammenfallen, sie liegen umgekehrt, sie mögen antiparallel heißen. Es wird sich zeigen, daß man ihre Winkel mit andern Winkeln von Parallelen, die auch der Null zustreben, vergleichen kann. Z. B. ist der Grenzwert des Quotienten aus dem nullwinkligen Dreieckswinkel zu dem Winkel, der zur Seite 2σ gehört eine unendlich große Zahl. Dieser letztere Winkel wird eben zu Null von einer höheren Ordnung.

Diese unendlichkleinen Parallelenwinkel sind für den Parallelismus zweier Geraden genau so charakteristisch wie der Parallelwinkel. In der sphärischen Geometrie sind diese Winkel erst Null wenn der Bogen Null wird.

II.

Man kann auch auf analytischem Wege zeigen, daß es sich hier um Parallele in umgekehrter Lage handelt. Man benutze dazu die *Gudermann*schen Koordinaten, das heißt die hyperb. Tangensfunktion der Projektionen auf die Achsen; diese bleiben für unendliche Strecken endlich, und man kann den Anfangspunkt ins Unendliche verlegen. In diesen Koordinaten hat $O'F$ die Gleichung:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \operatorname{th} OF.$$

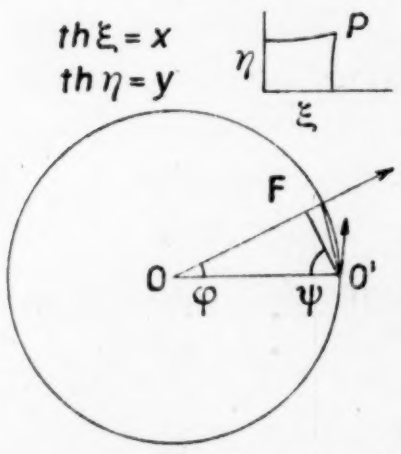


Fig. 2

Nun sei der Kreis Parallelkreis, dann kommt:

$$x\cos\frac{\pi}{n} + y\sin\frac{\pi}{n} = \operatorname{th} OO'\cos\frac{\pi}{n} = a\cos\frac{\pi}{n}.$$

$$(1.) \qquad x + y\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = a = \cos\frac{\pi}{n};$$

wenn $\operatorname{th}\alpha = a$. Und OF:

$$(2.) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Läßt man jetzt α über alle Grenzen wachsen, so wird OF antiparallel zur ξ Achse $O'F$ aber rückt ins Unendliche. Ihre Gleichungen werden:

$$(1.) \qquad x = 1,$$

$$(2.) \qquad y = 0,$$

denn der größte Wert, den x und y annehmen können ist 1. Die erste Gleichung

besagt, daß $O'F$ ganz im Unendlichen verläuft, die zweite, daß OF im Endlichen mit der ξ Achse zusammenfällt.

Transformiert man, bevor O' ins Unendliche rückt, auf O' durch die Gleichungen:

$$\xi = \xi' + \alpha,$$

$$y = \frac{y' \operatorname{ch} \xi'}{\operatorname{ch}(\xi' + \alpha)}$$

so wird Gleichung (1.):

$$\operatorname{th}(\xi' + \alpha) + \frac{y' \operatorname{ch}' \xi'}{\operatorname{ch}(\xi' + \alpha)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} = 0.$$

Man löse die Klammern auf, dividiere durch $\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \xi'$ und setze $\operatorname{th} \alpha$ und $\operatorname{th} \xi'$ gleich a und x'

$$x'\left(1 - a \cos \frac{\pi}{n}\right) + y' \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sqrt{1 - a^2} + \left(a - \cos \frac{\pi}{n}\right) = 0.$$

Da $\cos \frac{\pi}{n} = a$

$$x'(1 - a^2) + y' \frac{1 - a^2}{a} = 0,$$

$$x' + y' \frac{1}{a} = 0.$$

Zur Grenze übergegangen wird $\cos \frac{\pi}{n} = a = 1$

$$x' = - y'.$$

Da die Richtungen der ξ Achse im endlichen und unendlichen System entgegengesetzt ist, folgt,

(3.) $$\frac{y}{x} = 1.$$

$O'F$ ist also auf den unendlichen Anfangspunkt bezogen, eine Gerade, die den Achsenwinkel halbiert. Ebenso transformiere man (2.)

$$\frac{y}{\operatorname{ch} \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} (x + a); \quad \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} = \sin \frac{\pi}{n},$$

$$y = \frac{x + a}{\cos \frac{\pi}{n}}$$

und im Grenzfall und nach Umkehrung der ξ Achsenrichtung:

(4.) $$x + y = 1.$$

Das ist aber die Gleichung der zu beiden Achsen parallelen Geraden. Die antiparallele Linie im Endlichen wird also zur richtigen Parallelen, wenn man sie auf den unendlich fernen Anfangspunkt bezieht.

III.

Diese Antiparallele schneidet aus dem Grenzkreis den Einheitsbogen heraus, sie erweist sich im Unendlichen als zu den beiden Achsen parallel. Ihr Nullwinkel mit der ξ Achse ist der Grenzwert von $\frac{\pi}{n}$, er soll Elementarwinkel ε heißen. Man erhält jede beliebige Antiparallele wenn man von anderen Werten als ε ausgeht.

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

Begründet von **C. Ohrtmann** und **Felix Müller**

Herausgegeben von

E. Lampe und **A. Korn**

Ab Band 45. Heft 2. herausgegeben von L. Lichtenstein

Die Preise der Bände I—XLII werden auf Anfrage mitgeteilt

XLIII. Band. Jahrgang 1912, Heft 1. 1914. M. 17.50 Heft 2. 1915. M. 6.50
Heft 3. 1915. M. 16.50

XLIV. Band. Jahrgang 1913, Heft 1. 1916. M. 17.— Heft 2. 1917. M. 7.—
Heft 3. 1918. M. 16.50

XLV. Band. Jahrgang 1914/15, Heft 1. 1919. M. 19.— Heft 2. 1921. M. 28.—
Heft 3. 1922. M. 28.—

XLVI. Band. Jahrgang 1916/18, Heft 1. 1923. M. 28.— Heft 2. 1923. M. 20.—
Heft 3. 1924. M. 20.—

Astronomischer Jahresbericht

Begründet von

W. F. Wislicenus

Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft bearbeitet im Astronomischen Rechen-Institut zu Berlin

I. Band.	Die Literatur des Jahres 1899.	8°.	1900	M. 17.50
II. Band.	Die Literatur des Jahres 1900.	8°.	1901	M. 20.50
III. Band.	Die Literatur des Jahres 1901.	8°.	1902	M. 22.—
IV. Band.	Die Literatur des Jahres 1902.	8°.	1903	M. 21.—
V. Band.	Die Literatur des Jahres 1903.	8°.	1904	M. 21.50
VI. Band.	Die Literatur des Jahres 1904.	8°.	1905	M. 20.50
VII. Band.	Die Literatur des Jahres 1905.	8°.	1906	M. 21.—
VIII. Band.	Die Literatur des Jahres 1906.	8°.	1907	M. 22.50
IX. Band.	Die Literatur des Jahres 1907.	8°.	1908	M. 21.—
X. Band.	Die Literatur des Jahres 1908.	8°.	1909	M. 23.—
XI. Band.	Die Literatur des Jahres 1909.	8°.	1910	M. 24.—
XII. Band.	Die Literatur des Jahres 1910.	8°.	1911	M. 19.50
XIII. Band.	Die Literatur des Jahres 1911.	8°.	1912	M. 16.—
XIV. Band.	Die Literatur des Jahres 1912.	8°.	1913	M. 18.50
XV. Band.	Die Literatur des Jahres 1913.	8°.	1914	M. 18.—
XVI. Band.	Die Literatur des Jahres 1914.	8°.	1915	M. 13.—
XVII. Band.	Die Literatur des Jahres 1915.	8°.	1916	M. 10.—
XVIII. Band.	Die Literatur des Jahres 1916.	8°.	1919	M. 16.—
XIX. Band.	Die Literatur des Jahres 1917.	8°.	1920	M. 11.—
XX. Band.	Die Literatur des Jahres 1918.	8°.	1920	M. 10.50
XXI. Band.	Die Literatur des Jahres 1919.	8°.	1921	M. 13.—
XXII. Band.	Die Literatur des Jahres 1920.	8°.	1922	M. 14.50
XXIII. Band.	Die Literatur des Jahres 1921.	8°.	1923	M. 18.—
XXIV. Band.	Die Literatur des Jahres 1922.	8°.	1924	im Druck

WALTER DE GRUYTER & CO. ⁂ BERLIN W. 10 UND LEIPZIG